

Clasa a VI-a.

Problema 1. Mișcări uniforme Rezolvare

a) Mișcările fiind rectilinii și uniforme, rezultă:

$$d_R = v_R t; \quad d_M = v_M t;$$

$$d_R + d_M = d;$$

$$t = \frac{d}{v_R + v_M} = \frac{50 \text{ km}}{25 \text{ km/h}} = 2 \text{ h},$$

reprezentând timpul după care s-au întâlnit cei doi prieteni;

$$d_R = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2 \text{ h} = 30 \text{ km};$$

$$d_M = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2 \text{ h} = 20 \text{ km},$$

reprezentând distanțele parcurse de cei doi cicliști până la întâlnire;

$$d_{\text{porumbel}} = v_P t = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2 \text{ h} = 40 \text{ km},$$

reprezentând distanța parcursă de porumbel din momentul startului și până în momentul întâlnirii cicliștilor.

b) Imaginea lovirii copacului ajunge la ochii observatorului cu viteza luminii, iar zgomotul lovirii copacului ajunge la urechile observatorului cu viteza sunetului. Deoarece viteza sunetului este foarte mică în comparație cu viteza luminii, cele două semnale nu ajung simultan la observator. De aceea vedem lovitura dar încă nu percepem zgomotul produs de aceasta.

În aceste condiții, distanța dintre observator și pădurar este:

$$d = v_s t = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \text{ s} = 1020 \text{ m}.$$

c)

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2};$$

$$d_1 = d_2 = \frac{d}{2};$$

$$t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{\frac{d}{2}}{v_1} = \frac{d}{2v_1}; \quad t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{\frac{d}{2}}{v_2} = \frac{d}{2v_2};$$

$$v_{m,I} = \frac{d}{\frac{d}{2v_1} + \frac{d}{2v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 74,66 \frac{\text{km}}{\text{h}};$$

$$t_1 = t_2 = \frac{t}{2};$$

$$d_1 = v_1 \cdot \frac{t}{2}; \quad d_2 = v_2 \cdot \frac{t}{2}; \quad v_{m,II} = \frac{v_1 \cdot \frac{t}{2} + v_2 \cdot \frac{t}{2}}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}}; \quad v_{m,II} > v_{m,I}.$$

Problema 2. Balanța de laborator Rezolvare

a) Calculând densitățile amestecurilor lichide omogene din cele două vase rezultă:

$$\rho_A = \frac{m_A}{V_A} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V_1 + V_2 + V_3};$$

$$m_1 = m_2 = m_3;$$

$$\rho_A = \frac{3m_1}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_1}{\rho_2} + \frac{m_1}{\rho_3}} = \frac{3}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}};$$

$$\rho_A = \frac{3\rho_1\rho_2\rho_3}{\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_2};$$

$$\rho_A = 3 \frac{1 \cdot 1,3 \cdot 1,6}{1,3 \cdot 1,6 + 1 \cdot 1,6 + 1 \cdot 1,2} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 3 \frac{2,08}{2,08 + 1,6 + 1,2} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 1,278 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3};$$

$$\rho_B = \frac{m_B}{V_B} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V_1 + V_2 + V_3};$$

$$V_1 = V_2 = V_3;$$

$$\rho_B = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_1 + \rho_3 V_1}{3V_1};$$

$$\rho_B = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3};$$

$$\rho_B = \frac{1 + 1,3 + 1,6}{3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3};$$

$$\rho_B > \rho_A; m_B = m_A;$$

$$V_B = \frac{m_B}{\rho_B} = \frac{m_A}{\rho_B}; V_A = \frac{m_A}{\rho_A}; V_B < V_A,$$

rezultat în concordanță cu desenul din enunțul problemei.

Concluzie: în vasul C_A , de pe talerul P_A , se află în amestec volume egale din cele trei lichide, iar în vasul C_B , de pe talerul P_B , se află în amestec mase egale din cele trei lichide.

b) $m_1 = 1 \text{ g}$; $m_2 = 3 \text{ g}$; $m_3 = 9 \text{ g}$; $m_4 = 27 \text{ g}$.

c) Modalitățile de realizare ale cântăririlor sunt prezentate în tabelul alăturat.

Problema 3. Imagini stroboscopice Rezolvare

a) În desenul din figura alăturată sunt prezentate grafic proiecțiile de pe verticală ale bilei din imaginea II. Se observă că în orice moment proiecțiile de pe verticală ale bilei din imaginea II se află la același nivel cu pozițiile corespunzătoare ale bilei din imaginea I. Ca urmare, mișcarea bilei din imaginea I și mișcarea proiecției de pe verticală a bilei din imaginea II sunt identice.

Distanțele dintre pozițiile succesive ale bilei din imaginea I, surprinse la intervale egale de timp sunt din ce în ce mai mari, și sunt permanent egale cu distanțele dintre pozițiile succesive corespunzătoare ale proiecției verticale a bilei din imaginea II, surprinse la aceleași intervale de timp.

Ca urmare, cele două mișcări sunt mișcări accelerate identice, deoarece în intervale de timp egale distanțele parcurse sunt din ce în ce mai mari.

b) Mișcarea proiecției orizontale a bilei din imaginea II este uniformă, deoarece distanțele dintre oricare două poziții succesive ale acestei proiecții, surprinse la intervale de timp egale, sunt identice.

c) Distanța reală parcursă de proiecția orizontală a bilei din imaginea II este:

$$D = v_0 \cdot 11 \cdot \Delta t = 2,2 \text{ m.}$$

Distanța dintre pozițiile inițială și respectiv finală ale proiecției orizontale a bilei din imaginea II, măsurată pe desen este:

$$d =$$

Distanța dintre pozițiile inițială și respectiv finală ale bilei din imaginea I, măsurată pe desen este:

$$h =$$

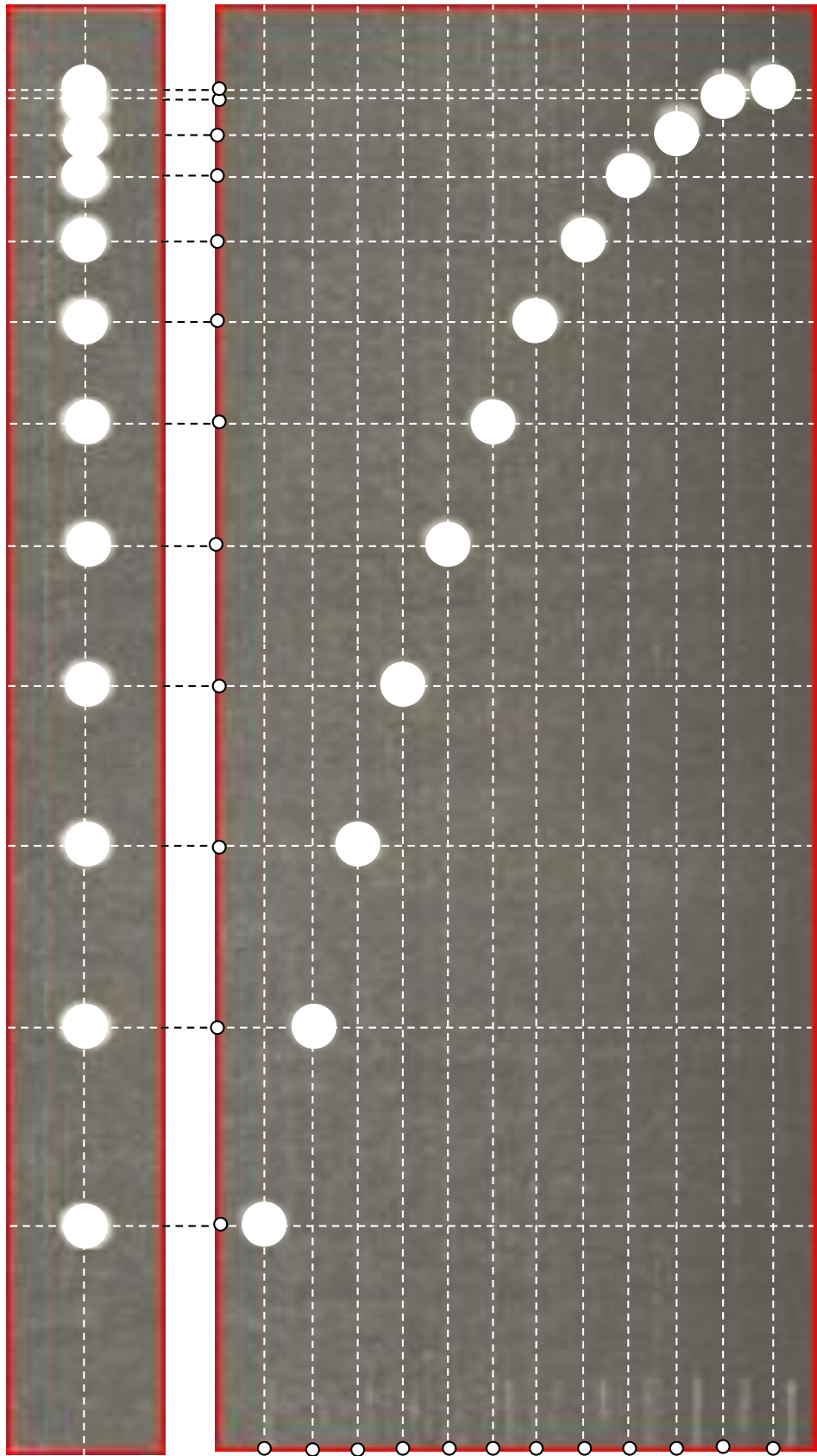
Diferența de nivel reală, corespunzătoare pozițiilor inițială și respectiv finală, pentru bilele din cele două imagini, este aceeași, H , ea rezultând din operația:

$$d \dots \dots \dots D;$$

$$h \dots \dots \dots H = ?;$$

X	A	B
$X_1 = 1 \text{ g}$	X_1	$a = 1 \text{ g}$
$X_2 = 2 \text{ g}$	$X_2 + a$	$b = 3 \text{ g}$
$X_3 = 3 \text{ g}$	X_3	$b = 3 \text{ g}$
$X_4 = 4 \text{ g}$	X_4	$a + b = 4 \text{ g}$
$X_5 = 5 \text{ g}$	$X_5 + a + b$	$c = 9 \text{ g}$
.....		
$X_{38} = 38 \text{ g}$	$X_{38} + a$	$b + c + d = 39 \text{ g}$
$X_{39} = 39 \text{ g}$	X_{39}	$b + c + d = 39 \text{ g}$
$X_{40} = 40 \text{ g}$	X_{40}	$a + b + c + d = 40 \text{ g}$

$$H = \frac{h \cdot D}{d} =$$



Problema 1. Două automobile și un lanț

Rezolvare

a) Din figura 1, unde sunt reprezentate pozițiile automobilelor în momentul emiterii semnalului sonor de pe automobilul din spate și în momentul recepției aceluiași semnal sonor pe automobilul din față, rezultă:

$$AA' = v_1 t_s; \quad BB' = v_2 t_s; \quad BA' = v_s t_s,$$

unde v_s - viteza sunetului în aer și t_s - durata propagării semnalului sonor de la emisie și până la recepție;

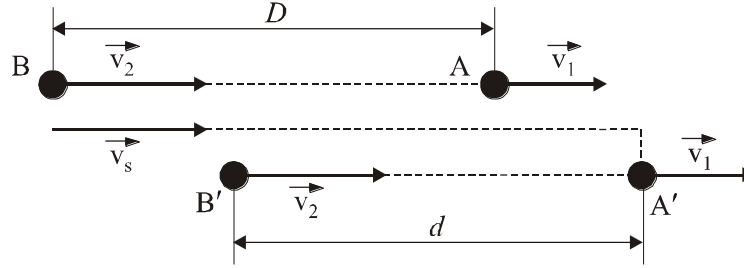


Fig. 1

$$v_s t_s = D + v_1 t_s;$$

$$v_s t_s = v_2 t_s + d;$$

$$t_s = \frac{D - d}{v_2 - v_1} = 1 \text{ s};$$

$$v_s = \frac{v_2 D - v_1 d}{v_2 - v_1} = 340 \text{ m/s}.$$

b) Dacă t este timpul după care distanța dintre automobile este din nou egală cu distanța inițială, D , așa cum indică figura 2, rezultă:

$$D + d_1 + D = d_2;$$

$$d_1 = v_1 t; \quad d_2 = v_2 t;$$

$$t = \frac{2D}{v_2 - v_1} = 22 \text{ s}.$$

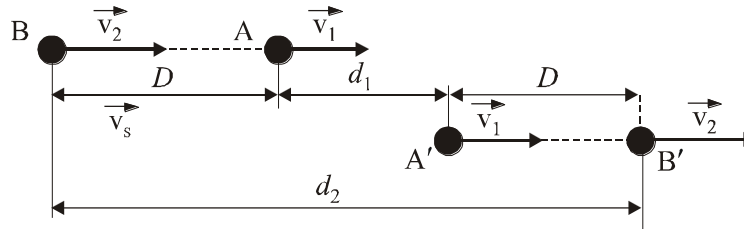


Fig. 2

c) Dacă t'' este timpul după care lanțul a fost întors din poziția ab în poziția ba, așa cum indică figura 3, astfel încât acum viteza întregului lanț este egală cu v_2 , rezultă:

$$2L = v_2 t'';$$

$$t'' = \frac{2L}{v_2} = 10 \text{ s}.$$

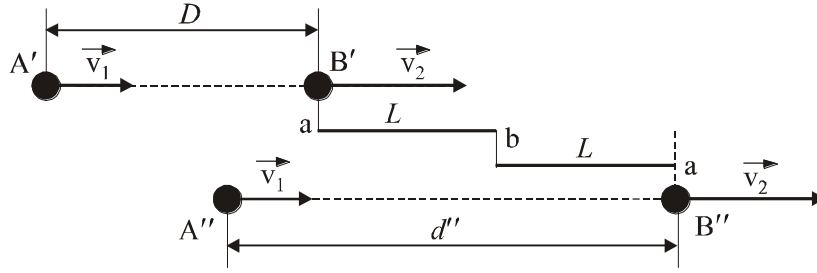


Fig. 3

Ca urmare, distanța dintre automobile în momentul întoarcerii lanțului este:

$$d'' = D + 2L - v_1 t'';$$

$$d'' = D + 2L \left(1 - \frac{v_1}{v_2} \right) = 630 \text{ m.}$$

Problema 2. Două resorturi

Rezolvare

a) Efectul suspendării unor corpuri identice în punctele A_0 și B_0 ale resortului nedeformat, precum și forțele care acționează asupra fiecărui element al sistemului, asigurând repausul acestuia sunt reprezentate în secvențele din figura 1, din care rezultă:

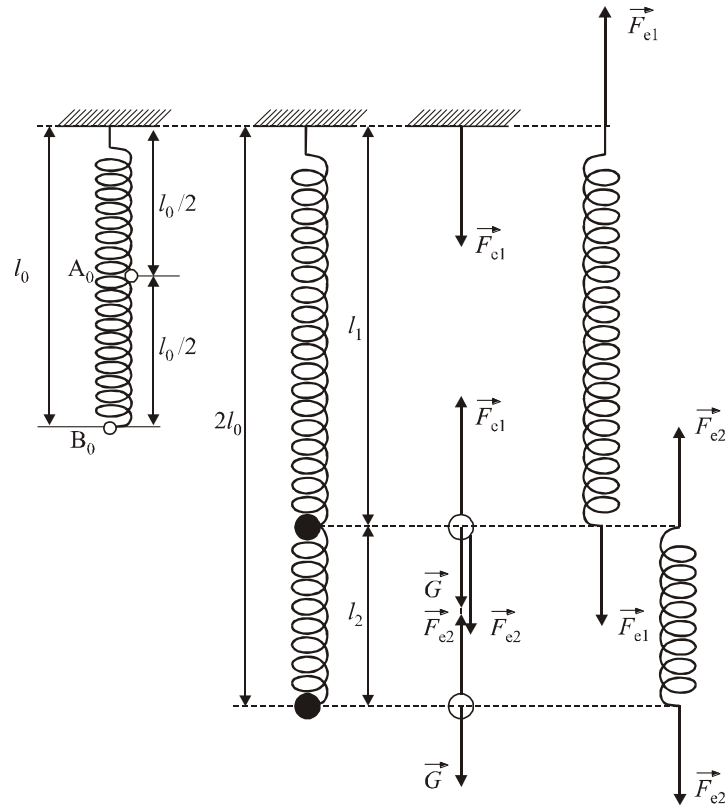


Fig. 1

$$F_{e1} = k_1 y_1,$$

unde k_1 este constanta de elasticitate a resortului reprezentat de jumătatea superioară a resortului dat, iar y_1 este alungirea jumătății superioare;

$$k_1 = k \frac{l_0}{\frac{l_0}{2}} = 2k; \quad y_1 = l_1 - \frac{l_0}{2};$$

$$F_{e1} = 2k(l_1 - \frac{l_0}{2}); \quad F_{e2} = k_2 y_2,$$

unde k_2 este constanta de elasticitate a resortului reprezentat de jumătatea inferioară a resortului dat;

$$k_2 = 2k; \quad y_2 = l_2 - \frac{l_0}{2};$$

$$F_{e2} = 2k(l_2 - \frac{l_0}{2});$$

$$F_{e1} = G + F_{e2},$$

reprezentând condiția de repaus a corpului superior;

$$F_{e2} = G,$$

reprezentând condiția de repaus a corpului inferior;

$$F_{e1} = 2G;$$

$$2k(l_1 - \frac{l_0}{2}) = 2mg;$$

$$2k(l_2 - \frac{l_0}{2}) = mg;$$

$$k(l_1 - \frac{l_0}{2}) = 2k(l_2 - \frac{l_0}{2});$$

$$2l_2 - l_1 = \frac{l_0}{2};$$

$$l_1 + l_2 = 2l_0$$

$$l_1 = \frac{7l_0}{6}; \quad l_2 = \frac{5l_0}{6};$$

$$m = \frac{2kl_0}{3g}.$$

b) Dacă cele două corpuri se suspendă în punctul A_0 , utilizând secvențele din figura 2, rezultă:

$$F_e' = 2G;$$

$$F_e' = 2k(l_1' - \frac{l_0}{2});$$

$$k(l_1' - \frac{l_0}{2}) = mg = \frac{2kl_0}{3};$$

$$l_1' = \frac{7l_0}{6};$$

$$L_1 = l_1' + \frac{l_0}{2}; \quad L_1 = \frac{5l_0}{3}.$$

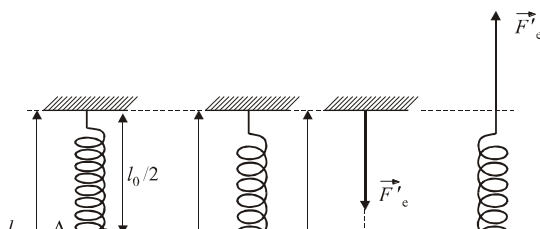


Fig. 2

În mod asemănător, dacă cele două corpuri se suspendă în punctul B_0 , rezultă:

$$L_2 = \frac{7l_0}{3}.$$

c) Dacă punctul de aplicație al acțiunii exterioare este punctul B_0 , utilizând secvențele din figura 3, unde sunt reprezentate forțele care acționează asupra elementelor sistemului atunci când mișcarea este uniformă, rezultă:

$$\vec{F}_e = -\vec{F}; \quad F_e = ky_1 = F;$$

$$F = F_f = \mu N; \quad N = G = mg; \quad ky_1 = \mu mg; \quad y_1 = \frac{\mu mg}{k}$$

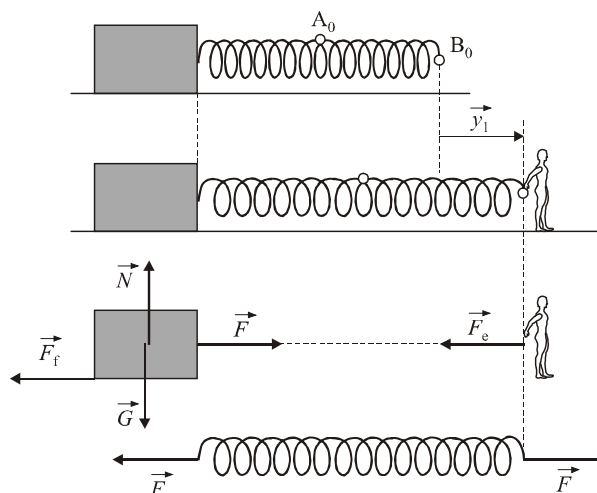


Fig. 3

Dacă punctul de aplicație al acțiunii exterioare este punctul A_0 , în mod asemănător, ținând seama că pentru sectorul de resort dintre corp și punctul A_0 , constanta de elasticitate este $2k$, rezultă alungirea:

$$y_2 = \frac{\mu mg}{2k}.$$

Problema 3. Trei resorturi

Rezolvare

a) Resortul inițial, cu lungimea l_0 în stare nedeformată, reprezentat în figura 1, sub acțiunea greutateii corpului cu masa m , dobândește alungirea:

$$\Delta l = \frac{mg}{k},$$

unde k este constanta de elasticitate a resortului, astfel încât lungimea finală a resortului este:

$$l = l_0 + \Delta l = l_0 + \frac{mg}{k},$$

din care rezultă: $k = \frac{mg}{l - l_0}$.

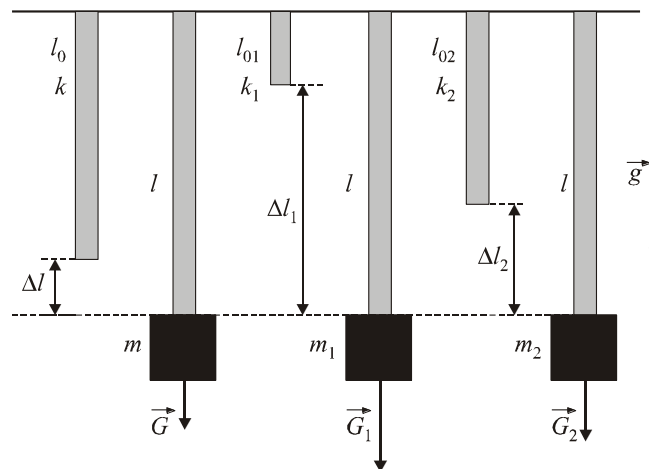


Fig. 1

Dacă resortul inițial, cu lungimea l_0 în stare nedeformată, are constanta de elasticitate k , atunci, cele două resorturi, cu lungimile $l_{01} = l_0/3$ și respectiv $l_{02} = 2l_0/3$, în stare nedeformată, au constantele de elasticitate k_1 și respectiv k_2 , ale căror valori se determină urmărind secvențele din figura 2.

Alungirea $\Delta l = F/k$ a resortului inițial, sub acțiunea unei forțe deformatoare F , este rezultatul alungirilor independente ale celor două sectoare (având, în stare nedeformată, lungimile $l_0/3$ și respectiv $2l_0/3$), sub acțiunea forței deformatoare F .

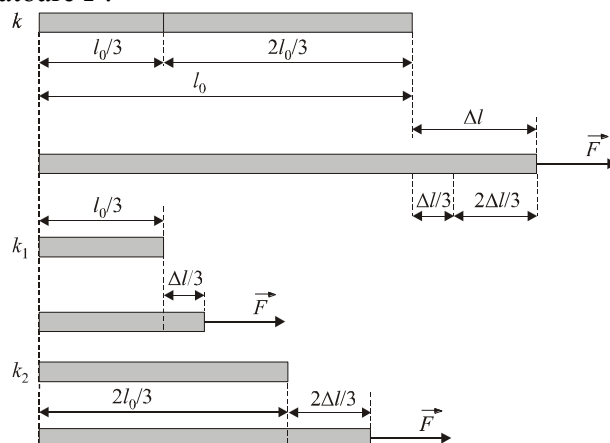


Fig. 2

Alungirea fiecărui sector fiind proporțională cu lungimea sa în stare nedeformată, rezultă:

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l}{3} = \frac{F}{k_1}; k_1 = \frac{3F}{\Delta l};$$

$$k_1 = 3k;$$

$$\Delta l_2 = \frac{2}{3} \Delta l = \frac{F}{k_2}; k_2 = \frac{3}{2} \frac{F}{\Delta l};$$

$$k_2 = \frac{3}{2} k.$$

În aceste condiții masele corpurilor care trebuie suspendate de cele două resorturi, astfel încât lungimile lor finale să fie l , se determină astfel:

$$\Delta l_1 = l - l_{01} = l - \frac{l_0}{3} = \frac{m_1 g}{k_1} = \frac{m_1 g}{3k};$$

$$m_1 = \frac{k}{g} (3l - l_0);$$

$$\Delta l_2 = l - l_{02} = l - \frac{2}{3} l_0 = \frac{m_2 g}{k_2} = \frac{2m_2 g}{3k};$$

$$m_2 = \frac{k}{g} \left(\frac{3}{2} l - l_0 \right).$$

b) Fiecare dintre cele două jumătăți ale resortului dat fiind un resort cu constanta de elasticitate $2k$, având în vedere echivalențele reprezentate în figura 3, rezultă:

$$\Delta l = \frac{mg}{4k}.$$

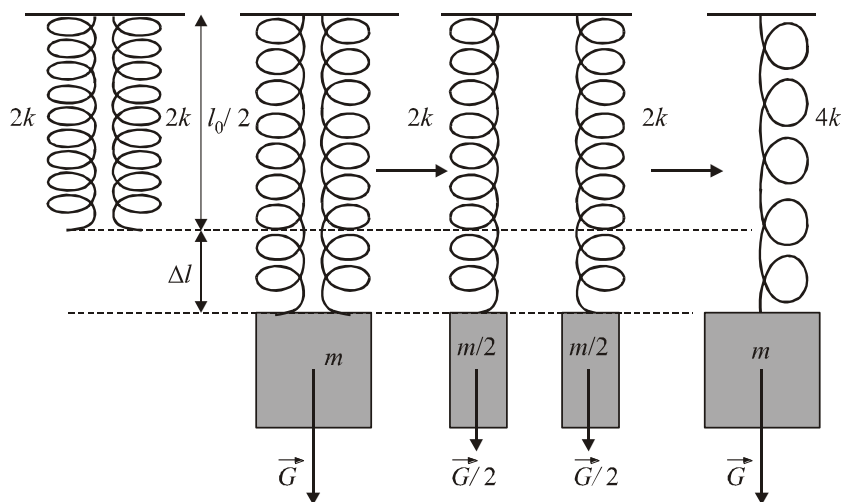


Fig. 3

c) Dacă bilele laterale sunt la același nivel iar $\angle B_1 B_2 B_3 = 90^\circ$, atunci, așa cum indică figura 4, $\triangle B_1 C B_2$ este un triunghi dreptunghic isoscel ($B_1 C = B_2 C = d$).

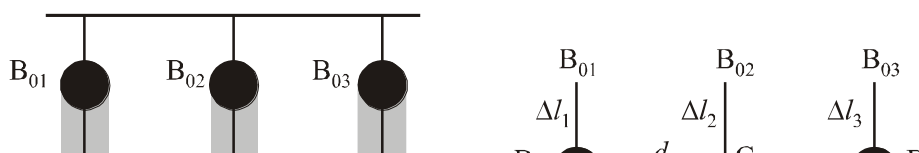


Fig. 4

Având în vedere că forțele deformatoare (greutățile bilelor) comprimă resorturile, rezultă:

$$\Delta l_1 = l_0 - l_1 = \frac{m_1 g}{k};$$

$$\Delta l_2 = l_0 - l_2 = \Delta l_1 + d = \frac{m_2 g}{k};$$

$$m_2 - m_1 = \frac{k d}{g};$$

$$m_1 = m_3.$$

Clasa a VIII-a

Problema 1. Rezolvare

a) Forțele care acționează asupra fiecărui element al sistemului, asigurând echilibrul la translație și rotație al acestora, fiind cele reprezentate în figura 1, rezultă:

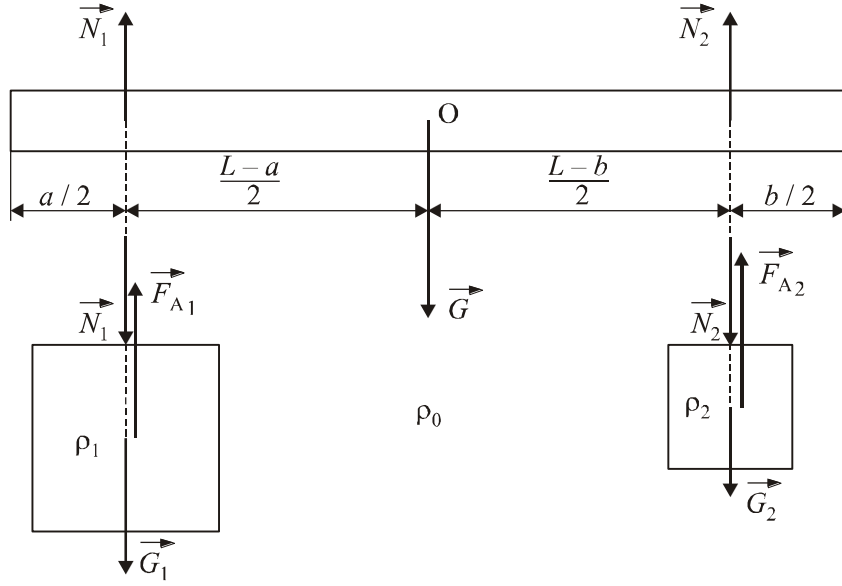


Fig. 1

$$\vec{N}_1 + \vec{F}_{A1} + \vec{G}_1 = 0; \quad N_1 = F_{A1} - G_1;$$

$$N_1 = a^3(\rho_0 - \rho_1)g;$$

$$\vec{N}_2 + \vec{F}_{A2} + \vec{G}_2 = 0; \quad N_2 = F_{A2} - G_2;$$

$$N_2 = b^3(\rho_0 - \rho_2)g;$$

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} = 0; \quad N_1 + N_2 = \rho L d g;$$

$$a^3(\rho_0 - \rho_1) + b^3(\rho_0 - \rho_2) = \rho L d,$$

reprezentând ecuația de echilibru pentru translație a scândurii;

$$N_1 \frac{L-a}{2} = N_2 \frac{L-b}{2},$$

reprezentând absența rotației scândurii;

$$a^3(\rho_0 - \rho_1)(L-a) = b^3(\rho_0 - \rho_2)(L-b).$$

Din ecuațiile anterioare, rezultă:

$$\rho_1 = \rho_0 - \frac{\rho L d}{a^3 \left(1 + \frac{L-a}{L-b} \right)};$$

$$\rho_2 = \rho_0 - \frac{\rho L d}{b^3 \left(1 + \frac{L-b}{L-a} \right)}.$$

Să presupunem că $\rho_1 > \rho_2$. Rezultă:

$$\rho_0 - \frac{\rho L d}{a^3 \left(1 + \frac{L-a}{L-b} \right)} > \rho_0 - \frac{\rho L d}{b^3 \left(1 + \frac{L-b}{L-a} \right)};$$

$$a^3 \left(1 + \frac{L-a}{L-b} \right) > b^3 \left(1 + \frac{L-b}{L-a} \right);$$

$$\frac{a^3}{L-b} > \frac{b^3}{L-a};$$

$$\frac{a^3}{b^3} > \frac{L-b}{L-a};$$

$$b < a; \quad \frac{L-b}{L-a} > 1;$$

$$\frac{a^3}{b^3} > 1; \quad a > b,$$

rezultat care confirmă ipoteza.

b) Pentru a scufunda și scândura, fără ca sistemul să se rotească, trebuie acționat asupra scândurii cu o forță $\vec{F}$ orientată în jos pe verticala centrului de greutate al scândurii, astfel încât, așa cum indică figura 2, unde este reprezentată și forța arhimedică suplimentară, să avem:

$$\underbrace{\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G}_1}_0 + \vec{F} + \vec{F}_A = 0;$$

$$\vec{F} + \vec{F}_A = 0; \quad F = \rho_0 L d g.$$

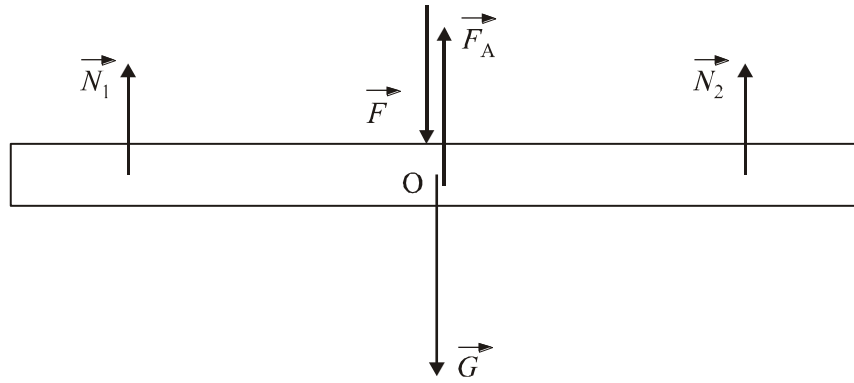


Fig. 2

c) Echilibrul sistemului se păstrează până când fața inferioară a cubului mare se așază pe fundul plan și orizontal al bazinului.

Problema 2. Rezolvare

a) Forțele care acționează asupra barei asigurând echilibrul acesteia, fiind cele reprezentate în desenul din figura 1, rezultă:



Fig. 1

$$\begin{aligned}F_{e2}(L-d) &= mg \frac{L}{2}; \\F_{e2} &= \frac{mgL}{2(L-d)} = k_2 \Delta l; \\F_{e1} + F_{e2} &= mg; \\F_{e1} &= \frac{mg(L-2d)}{2(L-d)} = k_1 \Delta l; \\\frac{F_{e2}}{F_{e1}} &= \frac{L}{L-2d} = \frac{k_2}{k_1}; \\\frac{k_2}{k_1} &= \frac{L}{L-2d}.\end{aligned}$$

b) Dacă bara se scufundă într-un lichid omogen ea va rămâne în poziție orizontală, alungirile resorturilor fiind identice, $\Delta l' < \Delta l$.

În noile condiții, forțele care acționează asupra barei fiind cele reprezentate în figura 2, rezultă:

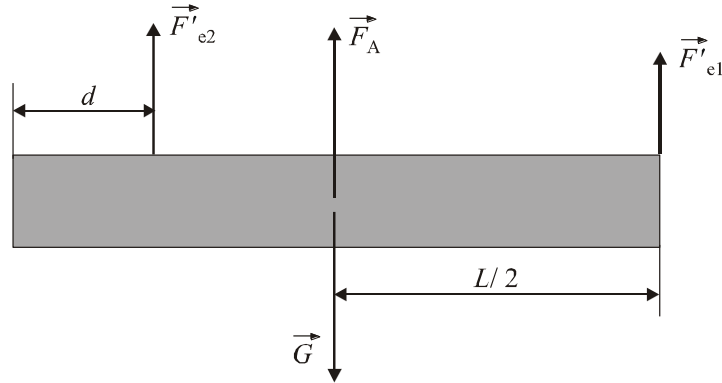


Fig. 2

$$\begin{aligned}F'_{e2}(L-d) + F_A \frac{L}{2} &= mg \frac{L}{2}; \\F'_{e2} &= \frac{(m-m_0)gL}{2(L-d)} = k_2 \Delta l';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'_{e2} + F_A + F'_{e1} &= mg; \\
F'_{e1} &= \frac{(m - m_0)g(L - 2d)}{2(L - d)} = k_1 \Delta l'; \\
\frac{F'_{e2}}{F'_{e1}} &= \frac{\Delta l}{\Delta l'} = \frac{m}{m - m_0}; \\
m &= \rho V; m_0 = \rho_0 V; \\
\frac{\Delta l}{\Delta l'} &= \frac{\rho}{\rho - \rho_0}.
\end{aligned}$$

c) Din condiția de plutire, utilizând desenul *a* din figura 3 determinăm la ce adâncime se află capătul inferior al barei.

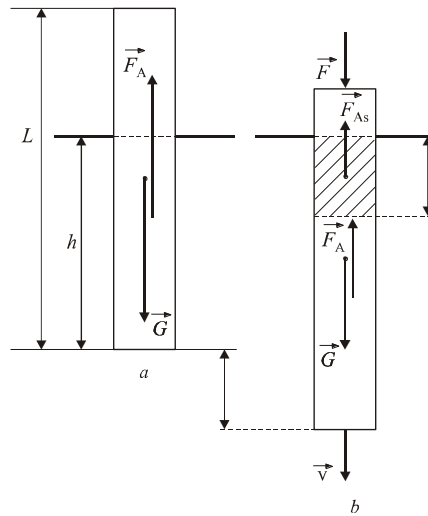


Fig. 3

Rezultă:

$$h = \frac{\rho}{\rho_0} L.$$

Când bara coboară pe verticală apare o forță arhimedică suplimentară, F_{As} . Pentru a asigura coborârea uniformă a barei trebuie să acționăm asupra sa, pe verticală în jos, cu o forță F care să compenseze permanent forța F_{As} , astfel încât rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra barei să fie nulă.

Utilizând desenul *b* din figura 3 rezultă:

$$F_{As} = m_{0s}g = \rho_0 S v t g;$$

$$F = F_{As};$$

$$F(t) = \rho_0 g v S t.$$

Graficul dependenței $F(t)$ este reprezentat în figura 4, unde:

$$t_{sc} = \frac{L}{v} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right);$$

$$F_{max} = gSL(\rho_0 - \rho).$$

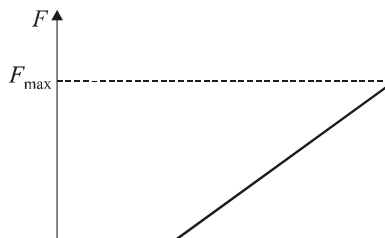


Fig. 4

Problema 3. Rezolvare

a) Adăugând ulei, lungimea porțiunii scufundate în apă este din ce în ce mai mică, valoarea minimă realizându-se în momentul acoperirii complete a cubului cu ulei.

Forțele care acționează asupra cubului scufundat, asigurând echilibrul static al acestuia, fiind cele reprezentate în figura 1, rezultă:

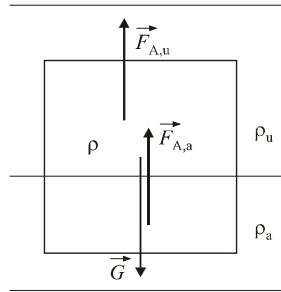


Fig. 1

$$\vec{G} + \vec{F}_{A,u} + \vec{F}_{A,a} = 0;$$

$$m = m_{0,a} + m_{0,u} = [\rho_a h + \rho_u (L - h)] L^2;$$

$$\rho = \frac{m}{L^3} = \frac{\rho_a h + \rho_u (L - h)}{L}.$$

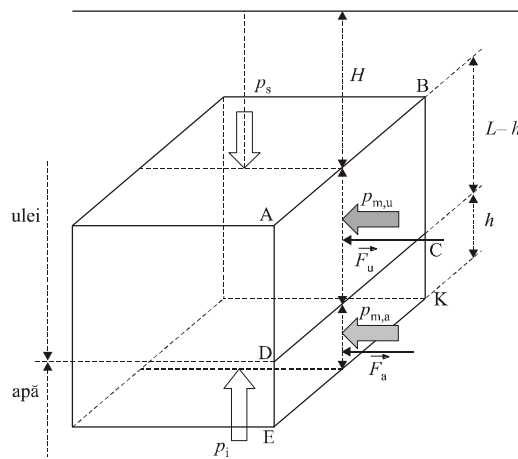


Fig. 2

b) Dacă H este înălțimea coloanei de ulei deasupra feței superioare a cubului (fig. 2), atunci presiunea hidrostatică exercitată pe fața superioară a cubului este:

$$p_s = \rho_u g H,$$

iar presiunea hidrostatică totală exercitată pe fața inferioară a cubului este:

$$p_i = \rho_u g(H + L - l) + \rho_a gh,$$

astfel încât diferența de presiune hidrostatică de pe cele două fețe este:

$$\Delta p = g[\rho_a h + \rho_u(L - h)].$$

Datorită directei proporționalități dintre adâncimea lichidului și presiunea hidrostatică ($p = \rho gh$), presiunea hidrostatică medie exercitată de coloana de ulei cu înălțimea $H + L - h$ pe sectorul ABCD al unei fețe laterale este:

$$p_{m,u} = \frac{\rho_u gH + \rho_u g(H + L - h)}{2};$$

$$p_{m,u} = \rho_u g\left(H + \frac{L - h}{2}\right),$$

astfel încât forța de presiune hidrostatică exercitată pe sectorul ABCD al feței laterale este:

$$F_u = p_{m,u} S_{ABCD} = \rho_u g\left(H + \frac{L - h}{2}\right)(L - h)L.$$

În mod asemănător, presiunea hidrostatică medie exercitată de coloana de apă cu înălțimea h pe sectorul CDEK al feței laterale este:

$$p_{m,a} = \frac{0 + \rho_a gh}{2} = \frac{1}{2} \rho_a gh,$$

astfel încât forța de presiune hidrostatică exercitată pe sectorul considerat este:

$$F_a = p_{m,a} S_{CDEK} = \frac{1}{2} \rho_a gh^2 L.$$

În aceste condiții rezultanta forțelor de presiune hidrostatică ce acționează pe fața laterală a cubului este:

$$F = F_a + F_u;$$

$$F = gL\left[\rho_u\left(H + \frac{L - h}{2}\right)(L - h) + \frac{1}{2} \rho_a h^2\right].$$

c)

$$V_{\text{sferă, Pb}} = \frac{\rho_a L^3 - m}{\rho_{\text{Pb}} - \rho_a};$$

$$V_{\text{glob sferic}} = \frac{m - \rho_u L^3}{\rho_u - \rho_{\text{glob}}}.$$

Clasa a IX-a

Problema 1. Optică geometrică - o combinație

REZOLVARE

A. O sferă transparentă simplu (3 puncte)

Cu notațiile din figură, legea refracției are forma $\sin \varphi = n \sin \beta$. Ca unghi exterior triunghiului ABC, pentru unghiul de deviație putem scrie $\theta = 2(\varphi - \beta)$. Folosind informația din enunț avem relația

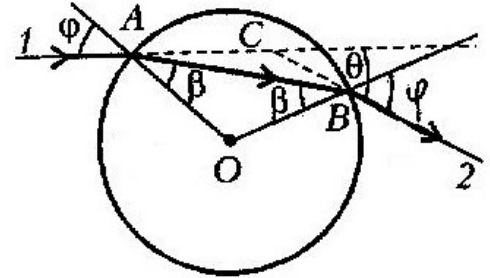
$$\operatorname{tg}(\varphi - \beta) = \operatorname{tg}(\theta/2) = 7/24,$$

unde $\operatorname{tg}(\varphi - \beta) = [\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \beta] / [1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \beta]$ și, în care, $\operatorname{tg} \varphi = 4/3$. Astfel obținem ușor că $\operatorname{tg} \beta = 3/4$. Folosind acum legătura dintre sinus și tangentă atât pentru unghiul φ cât și pentru unghiul β , găsim în final

$$n = [\operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} \beta] \cdot \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta) / (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} = 4/3.$$

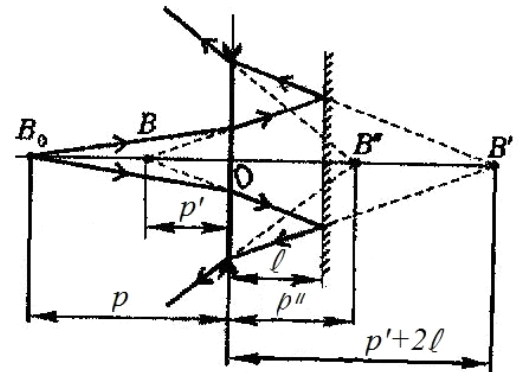
Sfera este în realitate o picătură de apă.

Observație: Pentru elevii care nu au abilitatea de a “manevra” formulele din trigonometrie utilizate în forma analitică a rezolvării de mai sus, profesorii evaluatori vor accepta și determinarea numerică a unghiurilor (folosind mini-calculatorul neprogramabil permis de regulamentul concursului). Astfel: $\varphi = 53,13^\circ$, $\theta = 32,52^\circ$, $\beta = \varphi - \theta/2 = 36,87^\circ$, $\operatorname{tg} \beta = 0,75$, $n = \sin \varphi / \sin \beta = 1,33$.



B. Un sistem optic simplu..... (6 puncte)

Pentru început, să presupunem că oglinda plană nu este prezentă. Fie p distanța de la piciorul chibritului (B_0) la lentilă (O) și p' distanța de la lentilă la piciorul B al imaginii chibritului. Dacă f este modulul distanței focale a lentilei putem scrie relația punctelor conjugate optic sub forma $1/p - 1/p' = -1/f$. Mărirea transversală dată de lentilă este $\beta_1 = p'/p$. Eliminăm distanța p din aceste relații și găsim că $p' = f(1 - \beta_1)$. În prezența oglinzii (vezi figura), razele reflectate formează, pentru punctul obiect B , imaginea punctiformă B' simetrică lui B față de planul oglinzii. Distanța dintre punctele B și B' este $2(p' + \ell)$. Imaginea finală se formează în punctul B'' , cu prelungirea razelor ce au trecut din nou prin lentilă. Fie $p'' = OB''$ și $OB' = BB' - BO$, adică $OB' = p' + 2\ell$. Avem relația punctelor conjugate optic $1/OB' - 1/OB'' = -1/f$, adică $1/(p' + 2\ell) - 1/p'' = -1/f$. Mărirea globală este produsul măririlor intermediare, adică $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$, unde $\beta_2 = OB''/OB' = p''/(p' + 2\ell)$. Ținem cont că $p'' = f(p' + 2\ell)/(p' + f + 2\ell)$ și că $p' = f(1 - \beta_1)$. Din $\beta/\beta_1 = \beta_2 = f/(2f + 2\ell - f\beta_1)$ rezultă $f = 2\ell/(\beta_1 - 2 + \beta_1/\beta) = 36\text{cm}$.



Din oficiu.....1 punct

Total10 punct

Problema 2. Sursă de lumină în apă

Rezolvare

a) Razele de lumină plecate de la sursa S, cât și razele de lumină plecate de la imaginea sa virtuală S', dată de oglinda plană, incidente în orice punct M de la marginea discului, așa cum indică figura 1, se reflectă total, întorcându-se în lichid, astfel încât nici sursa și nici imaginea ei nu pot fi văzute de deasupra lichidului. Cu atât mai mult, razele de lumină, plecate de la S și S', incidente în puncte depărtate de marginea discului (N, P, Q....), se vor reflecta total și nu vor putea ajunge la ochiul observatorului.

Într-adevăr, în acord cu legea reflexiei totale, urmărind detaliile din figura 1, rezultă:

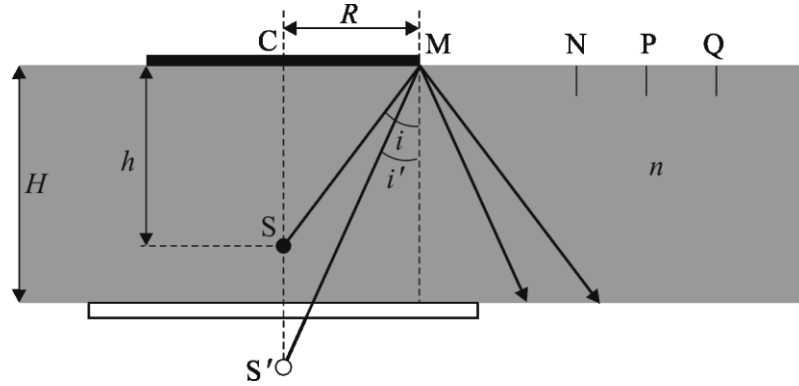


Fig. 1

$$\sin i = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} = 0,9; \sin i' = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2H - h)^2}} = 0,76;$$

$$\sin l = \frac{1}{n} = 0,7; i > l; i' > l.$$

b) După un timp t , considerat din momentul eliberării sursei de lumină, când aceasta a ajuns în poziția S, corespunzător cazului limită reprezentat în figura 2, sursa rămâne în continuare imposibil de observat, dar imaginea sa virtuală S' va putea fi observată, deoarece:

$$\sin i = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (h - vt)^2}}; i > l;$$

$$\sin i' = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2H - h + vt)^2}} = \sin l = \frac{1}{n},$$

de unde rezultă:

$$t = \frac{1}{v} \left(R\sqrt{n^2 - 1} + h - 2H \right)$$

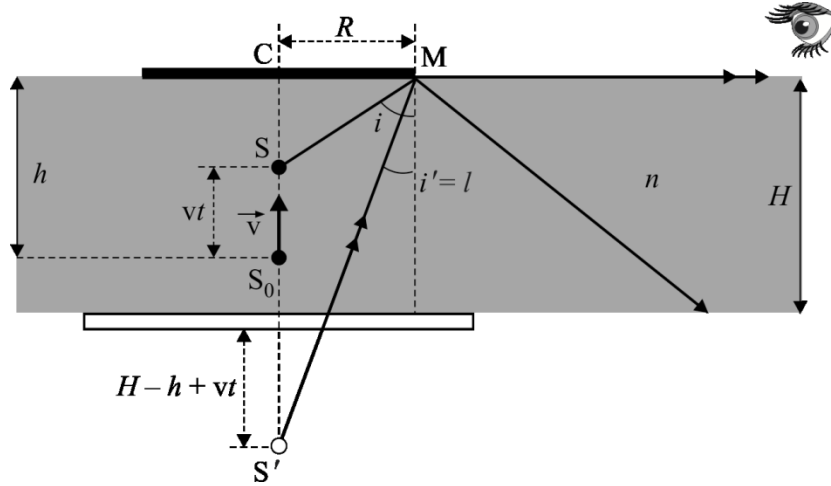


Fig. 2

c) Razele de lumină plecate de la sursă spre suprafața apei din vas, fie direct, fie după reflexia pe suprafața oglinzii, vor reuși să treacă în aer numai dacă unghiul lor de incidență pe suprafața plană și orizontală a apei din vas este mai mic decât unghiul limită ($i' \leq l$). În caz contrar ele se vor reflecta total, revenind în apa din vas.

Când sursa de lumină se deplasează pe orizontală spre dreapta, așa cum indică figura 3, și ajunge în poziția S_1 , raza directă S_1I se reflectă total, deoarece pentru ea unghiul de incidență este mai mare decât unghiul limită, în timp ce raza S'_1I , provenită de la sursa imagine S'_1 , este la limita reflexiei totale, ea putând trece spre ochiul observatorului. Dacă această situație se realizează după timpul t_1 de la eliberarea sursei, rezultă:

$$\begin{aligned}\tan i' &= \frac{R - d_1}{h + 2(H - h)} = \frac{R - d_1}{2H - h}; \\ \sin i' &= \sin l = \frac{1}{n}; \quad \tan i' = \frac{\sin i'}{\sqrt{1 - \sin^2 i'}}; \\ \frac{R - vt_1}{2H - h} &= \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}; \\ t_1 &= \frac{1}{v} \left(R - \frac{2H - h}{\sqrt{n^2 - 1}} \right).\end{aligned}$$

La momentul t_2 , când sursa de lumină ajunge în poziția S_2 , raza incidentă directă S_2I este la limita reflexiei totale, ea putând trece în aer spre ochiul observatorului, astfel încât:

$$\begin{aligned}\tan i' &= \frac{R - d_2}{h} = \frac{R - vt_2}{h}; \\ \tan i' &= \frac{\sin i'}{\sqrt{1 - \sin^2 i'}}; \quad \sin i' = \sin l = \frac{1}{n};\end{aligned}$$

$$t_2 = \frac{1}{v} \left(R - \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \right).$$

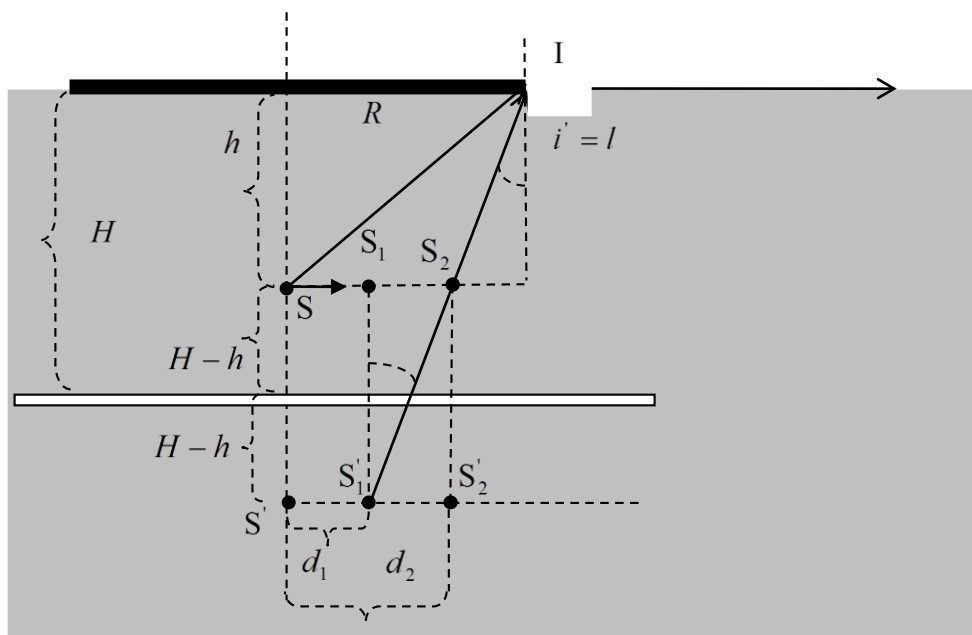


Fig. 3

Problema 3 Mecanică

BAREM

1) Pentru a ajunge în C, este necesar ca în acest punct

$$F_C \geq G \Rightarrow \frac{mv^2}{r} \geq mg \Rightarrow v \geq \sqrt{rg}, \quad (1)$$

în care F_C este forța centrifugă, G – greutatea corpului iar m – masa acestuia, g – accelerația gravitațională, r – raza *buclei circulare* iar viteza corpului în C.

1 punct

Dar,

$$v^2 = v_B^2 - 2g \cdot \overline{BC},$$

în care

$$v_B^2 = 2gr; \overline{BC} = 2r$$

Deci

$$v^2 = 2g(R - 2r) \quad (2)$$

1 punct

3. Substituind (2) în (1), avem

$$2g(R - 2r) \geq rg \Rightarrow 5r \leq 2R,$$

adică

$$r_{\max} = \frac{2}{5}R = 0,4R \quad (3)$$

1 punct

Relația (3) exprimă răspunsul la prima cerință a problemei.

4. Ajungând în C corpul se deplasează în aer pe o traiectorie parabolică (rezistența aerului se neglijează) care în sistemul de axe ortogonale xCy are ecuațiile parametrice:

$$\left. \begin{array}{l} x = vt \\ y = \frac{g}{2}t^2 \end{array} \right\}, \text{ în care } t \text{ este timpul} \quad (4).$$

1 punct

5. Pentru determinarea coordonatelor punctului P în sistemul xCy, utilizăm relațiile geometrice.

$$\overline{OP}^2 = \overline{PP'}^2 + \overline{OP'}^2 \Rightarrow R^2 = x^2 + \left(y + \overline{OC}\right)^2 \quad (5)$$

Dar

$$\overline{OC} = \overline{OB} - \overline{BC} = R - 2r_{\max} \quad (6)$$

Substituind (3) și (6) se obține

$$\overline{OC} = \frac{R}{5} \quad (7)$$

Substituind apoi (7) în (5), se obține ecuația

$$R^2 = x^2 + \left(y + \frac{R}{5}\right)^2 \quad (8)$$

1 punct

6. Eliminând timpul t din (4), rezultă

$$y = \frac{gx^2}{2v^2},$$

în care substituind $v = \sqrt{gr_{\max}}$ potrivit punctului 1) al problemei

$$v = \sqrt{\frac{2}{5}gR},$$

rezultă

$$y = \frac{5}{4R}x^2 \quad (9)$$

Din (8) și (9) care formează un sistem de ecuații se pot determina x și y.

1 punct

Substituind (9) în (8) se obține o ecuație bipătrată în x:

$$625x^4 + 600R^2x^2 - 384R^4 = 0, \quad (10)$$

pe care rezolvând-o ($x > 0$) se obține

$$x = \frac{2}{5} R \sqrt{\sqrt{33} - 3} \approx 0,66R \quad (11)$$

(De observat că $x = r_{\max} \sqrt{\sqrt{33} - 3}$)

1 punct

8. Substituind (11) în (9) se obține

$$y = \frac{R}{5} (\sqrt{33} - 3) \approx 0,55R \quad (12)$$

(De observat că $y = \overline{OC} (\sqrt{33} - 3)$)

1 punct

9. Punctul D este definit de distanța $\overline{BD}$ care rezultă din (9) în care punem condiția

$$y = 2r_{\max} = \frac{4}{5} R \quad (13)$$

și determină $x = \overline{BD}$:

$$x^2 = \left(\frac{4}{5} R \right)^2 \Rightarrow x = 0,8R \quad (14)$$

1 punct

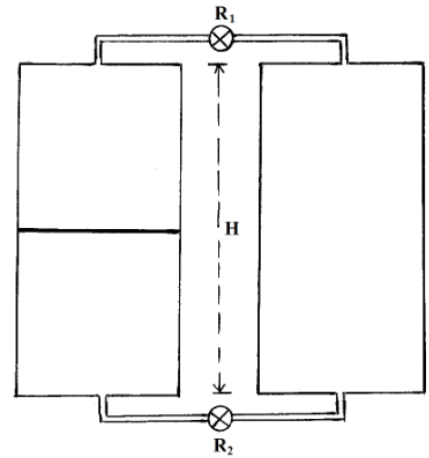
Total: 9 puncte + 1 punct (din oficiu) = 10 puncte

Clasa a X-a

Problema 1. Legile gazelor – două probleme distincte Rezolvare

A.
.5 puncte

Când vasele comunică numai prin partea inferioară putem scrie $p_2 = p_1 + p_p$ cu $p_2 = 2p_1$, astfel că presiunea exercitată de piston este $p_p = p_1$. Fie ν_1 , respectiv ν_2 numerele de moli din volumele $V = SH/2$, respectiv $3V$ (jumătatea de jos a vasului din stânga plus întreg vasul din dreapta). Putem scrie $p_1 = \nu_1 RT/V$, respectiv $p_2 = \nu_2 RT/3V = 2p_1 = 2\nu_1 RT/V$. De aici $\nu_2 = 6\nu_1$. În condițiile unei distribuții omogene, în vasul din



dreapta sunt $4\nu_1$ moli, iar în cel din stânga, sub piston, $2\nu_1$ moli. Când se închide robinetul de jos dar se deschide cel de sus, în vasul din dreapta și în partea superioară a celui din stânga vor fi în total $5\nu_1$ moli iar în cel din stânga, sub piston, vor fi $2\nu_1$ moli. Presiunea gazului de sub piston va fi $p_{jos} = 2\nu_1 RT/V_x$ iar cea de deasupra pistonului (și din vasul din dreapta) va fi $p_{sus} = 5\nu_1 RT/(4V - V_x)$. În plus, $p_{jos} = p_{sus} + p_p$ cu $p_p = p_1 = \nu_1 RT/V$. Obținem imediat ecuația $V_x^2 - 11V_x + 8V^2 = 0$, cu soluția $V_x = \frac{V}{2}(11 - \sqrt{89})$. Astfel $x = V_x/S = (H/4)(11 - \sqrt{89}) \approx 0,39H$.

B. **4 puncte**

La început, greutatea pistonului comprimă resortul cu $x = mg/k$. În a doua situație, putem scrie $\rho g V_1 + mg = k(x + \frac{V_1 - V_0}{S})$. De aici rezultă, $\rho g V_1 S = k(V_1 - V_0)$, (*). În a treia situație echilibrul înseamnă $\rho g V + mg = k(x + \frac{2V - V_0}{S})$, adică $\rho g V S = k(2V - V_0)$, (**). Prin împărțirea relațiilor stelate găsim $V = (V_0 V_1)/(V_0 + V_1)$.

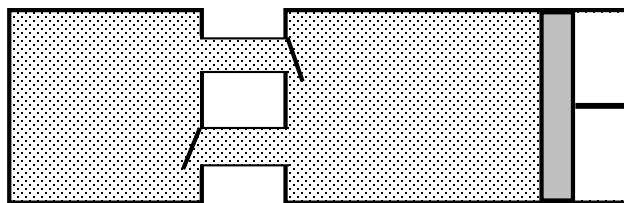
Din oficiu. **1 punct**

Total. **10 punct**

Problema 2. Termodinamică

Rezolvare

a) Complexitatea fiecărei transformări particulare constă în aceea că sistemul schimbă cu exteriorul nu numai căldură și lucru mecanic, ci și substanță. Cu alte cuvinte gazul din cilindru cu piston este un sistem termodinamic deschis. De aceea, trebuie să existe, un recipient exterior special, care conține același gaz monoatomic și care este conectat la cilindru cu piston, prin intermediul a două tuburi, prevăzute cu o supapă de admisie și respectiv o supapă de evacuare. Cele două supape nu pot fi deschise simultan.



b) Pentru un gaz monoatomic, căldura molară la volum constant este $C_v = \frac{3}{2}R$.

- procesul: $1 \rightarrow 2$

$$1(v_1, p, V, T) \rightarrow 2(v_2, 3p, V, T);$$

$V = \text{constant}; T = \text{constant}; v = \text{variabil}; p = \text{variabil};$

$$pV = v_1 RT;$$

$$3pV = v_2 RT;$$

$$\frac{3pV}{pV} = \frac{v_2 RT}{v_1 RT} = \frac{v_2}{v_1} = 3;$$

$$v_2 = 3v_1; v_2 > v_1 \rightarrow (\text{în cilindru intră gaz}); p_2 > p_1;$$

$$U_1 = v_1 C_v T;$$

$$U_2 = v_2 C_v T;$$

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = (v_2 - v_1) C_v T;$$

- procesul: $2 \rightarrow 3$

$$2(v_2, 3p, V, T) \rightarrow 3(v_3, 3p, 3V, T);$$

$3p = \text{constant}; T = \text{constant}; v = \text{variabil}; V = \text{variabil};$

$$3pV = v_2 RT;$$

$$3p3V = v_3 RT;$$

$$\frac{9pV}{3pV} = \frac{v_3 RT}{v_2 RT} = \frac{v_3}{v_2} = 3 = \frac{v_3}{3v_1};$$

$$v_3 = 9v_1; v_3 > v_2 \rightarrow (\text{în cilindru intră gaz}); V_3 > V_2;$$

$$U_2 = v_2 C_v T;$$

$$U_3 = v_3 C_v T;$$

$$\Delta U_{23} = U_3 - U_2 = (v_3 - v_2)C_v T;$$

- procesul: $3 \rightarrow 4$

$$3(v_3, 3p, 3V, T) \rightarrow 4(v_4, 3p, 3V, 3T);$$

$3p = \text{constant}; 3V = \text{constant}; v = \text{variabil}; T = \text{variabil};$

$$3p3V = v_3 RT;$$

$$3p3V = v_4 R3T;$$

$$\frac{9pV}{9pV} = \frac{v_4 R3T}{v_3 RT} = \frac{3v_4}{v_3} = \frac{3v_4}{9v_1} = 1;$$

$v_4 = 3v_1; v_4 < v_3 \rightarrow (\text{din cilindru iese gaz}); T_4 > T_3;$

$$U_3 = v_3 C_v T;$$

$$U_4 = v_4 C_v 3T;$$

$$\Delta U_{34} = U_4 - U_3 = (3v_4 - v_3)C_v T;$$

- procesul: $4 \rightarrow 5$

$$4(v_4, 3p, 3V, 3T) \rightarrow 5(v_5, p, 3V, 3T);$$

$3V = \text{constant}; 3T = \text{constant}; v = \text{variabil}; p = \text{variabil};$

$$3p3V = v_4 R3T;$$

$$p3V = v_5 R3T;$$

$$\frac{3pV}{9pV} = \frac{v_5 R3T}{v_4 R3T} = \frac{v_5}{v_4} = \frac{v_5}{3v_1} = \frac{1}{3};$$

$v_5 = v_1; v_5 < v_4 \rightarrow (\text{din cilindru iese gaz}); p_5 < p_4;$

$$U_4 = v_4 C_v 3T;$$

$$U_5 = v_5 C_v 3T;$$

$$\Delta U_{45} = U_5 - U_4 = (v_5 - v_4)C_v 3T;$$

- procesul: $5 \rightarrow 6$

$$5(v_5, p, 3V, 3T) \rightarrow 6(v_6, p, V, 3T);$$

$p = \text{constant}; 3T = \text{constant}; v = \text{variabil}; V = \text{variabil};$

$$p3V = v_5 R3T;$$

$$pV = v_6 R3T;$$

$$\frac{pV}{3pV} = \frac{v_6 R3T}{v_5 R3T} = \frac{v_6}{v_5} = \frac{v_6}{v_1} = \frac{1}{3};$$

$v_6 = v_1 / 3; v_6 < v_5 \rightarrow (\text{din cilindru iese gaz}); V_6 < V_5;$

$$U_5 = v_5 C_v 3T;$$

$$U_6 = v_6 C_v 3T;$$

$$\Delta U_{56} = U_6 - U_5 = (v_6 - v_5)C_v 3T;$$

- procesul: $6 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}
& 6(v_6, p, V, 3T) \rightarrow 1(v_1, p, V, T); \\
& p = \text{constant}; V = \text{constant}; v = \text{variabil}; T = \text{variabil}; \\
& pV = v_1 RT; \\
& pV = v_6 R 3T; \\
& \frac{pV}{pV} = \frac{v_6 R 3T}{v_1 RT} = \frac{3v_6}{v_1} = 1; \\
& v_1 = 3v_6; v_1 > v_6 \rightarrow (\text{în cilindru intră gaz}); T_1 < T_6; \\
& U_6 = v_6 C_v 3T; \\
& U_1 = v_1 C_v T; \\
& \Delta U_{61} = U_1 - U_6 = (v_1 - 3v_6) C_v T;
\end{aligned}$$

Concluzie:

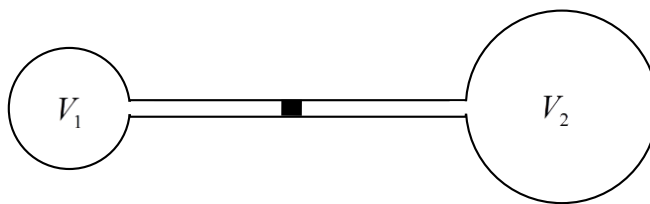
$$\begin{aligned}
& v_1; v_2 = 3v_1; v_3 = 9v_1; v_4 = 3v_1; v_5 = v_1; v_6 = v_1 / 3; \\
& v_3 = v_{\max} = v_{\text{implicat}} = v; \\
& v_1 = \frac{v}{9}; v_2 = \frac{v}{3}; v_3 = v; v_4 = \frac{v}{3}; v_5 = \frac{v}{9}; v_6 = \frac{v}{27}; \\
& \Delta U_{12} = (v_2 - v_1) C_v T = \frac{1}{3} v RT; \\
& \Delta U_{23} = (v_3 - v_2) C_v T = v RT; \\
& \Delta U_{34} = (3v_4 - v_3) C_v T = 0; \\
& \Delta U_{45} = (v_5 - v_4) C_v 3T = -v RT; \\
& \Delta U_{56} = (v_6 - v_5) C_v 3T = -\frac{1}{3} v RT; \\
& \Delta U_{61} = (v_1 - 3v_6) C_v T = 0;
\end{aligned}$$

- procesul ciclic: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 1

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{34} + \Delta U_{45} + \Delta U_{56} + \Delta U_{61} = 0.$$

c) Dispozitivul poate fi folosit ca termometru de cameră, dacă volumele de aer, V_1 și respectiv V_2 , separate de picătura de mercur, depind de temperatura mediului înconjurător.

Pentru început, vom cerceta această dependență, când dispozitivul este așezat astfel încât tubul de legătură dintre baloane este orizontal. Dacă picătura de mercur se află în echilibru la temperatura T , atunci presiunile la stânga și la dreapta picăturii trebuie să fie egale. Dacă m_1 și respectiv m_2 sunt masele de aer din cele două compartimente, cu volumele V_1 și respectiv V_2 , separate de picătura de mercur, rezultă:



$$p_1 = \frac{m_1 RT}{\mu V_1}; \quad p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu V_2};$$

$$p_1 = p_2; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Corespunzător acestei poziții, raportul V_1/V_2 nu depinde de temperatură. Deoarece $V_1 + V_2 =$ constant, rezultă că nici V_1 și nici V_2 nu depind de temperatură. Ca urmare, dacă tubul de legătură dintre baloane este menținut orizontal, dispozitivul nu poate fi etalonat și folosit ca termometru pentru mediul înconjurător.

Dacă dispozitivul este pus astfel încât tubul de legătură dintre baloane este în poziție verticală, rezultă:

$$p_1 = \frac{m_1 RT}{\mu V_1}; \quad p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu V_2};$$

$$p_1 - p_2 = \frac{mg}{S},$$

unde m este masa picăturii de mercur, iar S este aria secțiunii tubului;

$$\frac{m_1}{V_1} - \frac{m_2}{V_2} = \frac{\mu mg}{RTS}.$$

Deoarece $V_1 + V_2 =$ constant, în acest caz și V_1 și V_2 depind de temperatură. Dispozitivul, cu tubul de legătură în poziție verticală poate fi folosit ca termometru de cameră.

Problema 3 Rezolvare

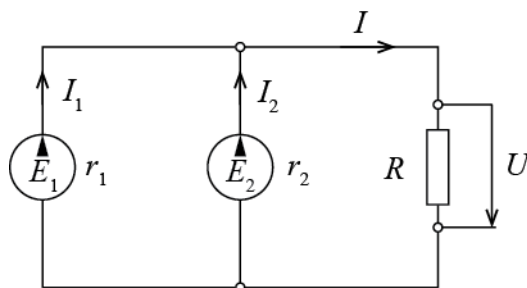
$$E_1 = E_2 = U \left(1 + \frac{G}{g_1 + g_2} \right) = U \left[1 + \frac{r_1 r_2}{R(r_1 + r_2)} \right] \approx 122,22...V$$

$$(\Delta P)_{\min} = U^2 \frac{G^2}{g_1 + g_2} = U_1^2 \frac{r_1 r_2}{R^2(r_1 + r_2)} \approx 1344,44...W$$

$$\eta_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{G}{g_1 + g_2}} = \frac{1}{1 + \frac{r_1 r_2}{R(r_1 + r_2)}} = 0,9$$

BAREM

1. Pierderile de putere pe rezistențele electrice interioare ale celor două surse (vezi figura) sunt:



$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2, \quad (1)$$

în care I_1 și I_2 sunt intensitățile curenților electrice debitați de cele două surse.

1 punct

2. Pentru a determina $\Delta P(E_1, E_2)$ explicităm I_1 și I_2 :

$$I_1 = \frac{E_1 - U}{r_1} = g_1(E_1 - U); \quad I_2 = (E_2 - U)g_2, \quad E_1, E_2 > U \quad (2)$$

Substituind (2) în (1), se obține

$$\Delta P(E_1, E_2) = g_1(E_1 - U)^2 + g_2(E_2 - U)^2 > 0, \quad g_1 = \frac{1}{r_1}; \quad g_2 = \frac{1}{r_2} \quad (3)$$

Din (3) rezultă că $\Delta P(E_1, E_2)$ este o funcție reală de două variabile reale. Pentru a aduce această funcție la una de o singură variabilă, ne vom folosi de o funcție de „legătură” între E_1 , E_2 și U .

1 punct

3. Într-adevăr,

$$U = RI = R(I_1 + I_2) \quad (4)$$

Substituind (3) în (4) și ținând seama că $G = \frac{1}{R}$, se obține funcția căutată

$$E_1 g_1 + E_2 g_2 = U(g_1 + g_2 + G) \quad (5)$$

1 punct

4. Dată fiind (5), putem reduce prin (3) ΔP ca funcție de o singură variabilă E_1 sau E_2 . Să zicem

$$E_1, \text{ astfel încât din (5) rezultă } E_2 = \frac{1}{g_2} [U(g_1 + g_2 + G) - E_1 g_1] \quad (6)$$

1 punct

5. Substituind (6) în (3) se obține funcția $\Delta P(E_1)$ pe care o căutam

$$\Delta P = g_1 (E_1 - U)^2 + \frac{1}{g^2} [U(g_1 + G) - E_1 g_1]^2,$$

sau

$$\Delta P = g_1 \left(1 + \frac{g_1}{g_2} \right) E_1^2 - 2g_1 U \left(1 + \frac{g_1 + G}{g_2} \right) E_1 + U^2 \left[g_1 + \frac{(g_1 + G)^2}{g_2} \right] \quad (7)$$

1 punct

6. $\Delta P(E_1)$ exprimată prin (7) reprezintă o funcție polinomială de gradul doi (trinom), astfel încât valoarea minimă a acesteia are loc atunci când

$$E_1 = \frac{2g_1 U \left(1 + \frac{g_1 + G}{g_2} \right)}{2g_1 \left(1 + \frac{g_1}{g_2} \right)} = \frac{U(g_1 + g_2 + G)}{g_1 + g_2} \quad (8)$$

1 punct

7. Substituind apoi (8) în (6), se obține

$$E_2 = E_1 = U \left(1 + \frac{G}{g_1 + g_2} \right) = U \left[1 + \frac{r_1 r_2}{R(r_1 + r_2)} \right] \approx 122,22...V \quad (9)$$

ceea ce reprezintă primul răspuns la cerințele problemei.

1 punct

8. Înlocuind (9) în (3) se obține

$$(\Delta P)_{\min} = U^2 \frac{G^2}{g_1 + g_2} = U^2 \cdot \frac{r_1 r_2}{R^2 (r_1 + r_2)} \approx 1344,44 \dots \text{W} \quad (10)$$

9. Randamentul circuitului în condiția (9) este

$$\eta_{\max} = \frac{P_n}{P_u + (\Delta P)_{\min}} ; \quad P_u = \frac{U^2}{R} = GU^2 - \text{puterea utilă}$$

Având în vedere (10),

$$\eta_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{G}{g_1 + g_2}} = \frac{1}{1 + \frac{r_1 r_2}{R(r_1 + r_2)}} = 0,9 \quad (11)$$

1 punct

10. 1 punct – din oficiu. Total 10 puncte.

Clasa a XI-a

Problema 1. Un ciclu în trepte Rezolvare

Într-un ciclu, gazul primește căldură în timpul procesului izocor de la volumul constant V și în cele $(n-1)$ procese izobare, cu presiunile constante $np, (n-1)p, (n-2)p, \dots, 2p$, cu $\Delta V = V \dots 0,75p$

Putem scrie

$$Q_{(+)} = \nu C_V (npV - pV) / \nu R + \nu C_p (pV / \nu R) [n(2-1) + (n-1)(3-2) + \dots + 2(n-n+1)] =$$

$$= (C_V / R)(n-1)pV + (C_p / R)pV[2+3+\dots+(n-1)+n]. \dots\dots\dots 2p$$

Ținem cont că

$$C_V / R = 1/(\gamma - 1) \text{ și } C_p / R = \gamma/(\gamma - 1) \dots\dots\dots 0,75p$$

$$\text{Și că suma din paranteza dreaptă este } (2+n)(n-1)/2 \dots\dots\dots 0,75p$$

obținând în final

$$Q_{(+)} = (n-1)(pV)/[2(\gamma-1)]\{2+\gamma(n+2)\} \dots\dots\dots 0,75p$$

Ca arie din interiorul ciclului, lucrul mecanic efectuat de gaz într-un ciclu este

$$L_{ciclu} = Vp[(n-1) + (n-1-1) + \dots + (2-1)] = pV[1+2+\dots+(n-1)] = (pV)n(n-1)/2 \dots\dots 2p$$

$$\text{Acum randamentul ciclului este } \eta = L_{ciclu} / Q_{(+)} = n(\gamma-1)/\{2+\gamma(n+2)\} \dots\dots\dots 2p$$

Din oficiu.....1 punct

Total.....10 puncte

Problema 2. Oscilații armonice

a) Corespunzător stării de echilibru a sistemului, forțele care acționează asupra fiecărui element al sistemului sunt cele reprezentate în desenul din figura 1, din care rezultă:

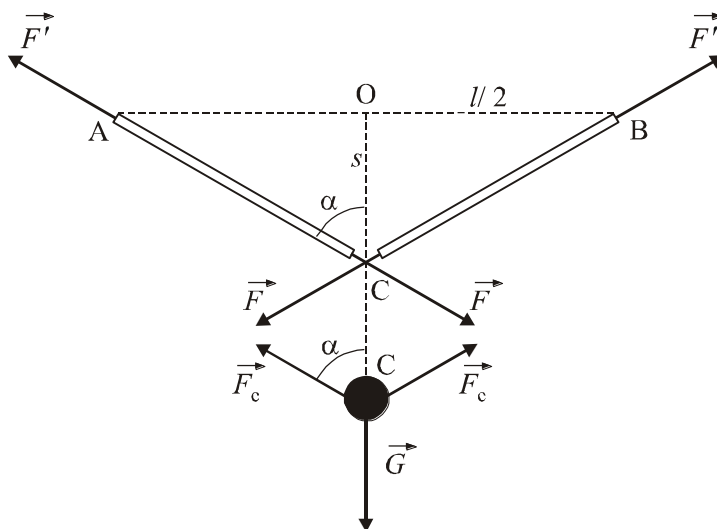


Fig. 1

$$\vec{F}_e = -\vec{F}; F_e = F;$$

$$2F_e \cos \alpha = mg; 2F \cos \alpha = mg;$$

$$\frac{\Delta l}{2} = \frac{1}{E} \frac{F}{\pi r^2} \frac{l}{2},$$

unde $\frac{\Delta l}{2}$ este alungirea unei jumătăți a firului;

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{Fl}{\pi r^2}; \Delta l = \frac{lmg}{2\pi r^2 E \cos \alpha};$$

$$\cos \alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2 + \frac{l^2}{4}}}; \cos \alpha = \frac{s}{\frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{2s}{l + \Delta l}; 2s = (l + \Delta l) \cos \alpha;$$

$$2s - \Delta l \cos \alpha = l \cos \alpha;$$

$$2s - \frac{mgl}{2\pi r^2 E} = \cos\alpha = \frac{ls}{\sqrt{s^2 + \frac{l^2}{4}}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{2}{l} \left(1 + \frac{4s^2}{l^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{2}{l} \left(1 - 2 \frac{s^2}{l^2} \right);$$

$$s = \frac{l}{2} \sqrt[3]{\frac{mg}{\pi r^2 E}}.$$

b) În figura 2, unde punctul C reprezintă poziția de echilibru a corpului suspendat de fir, rezultanta forțelor care acționează asupra corpului ($\vec{F}_e, \vec{F}_e, \vec{G}$) este nulă (notația $\vec{F}_e$ reprezintă forța elastică de reacție a fiecărei jumătăți de fir asupra corpului suspendat).

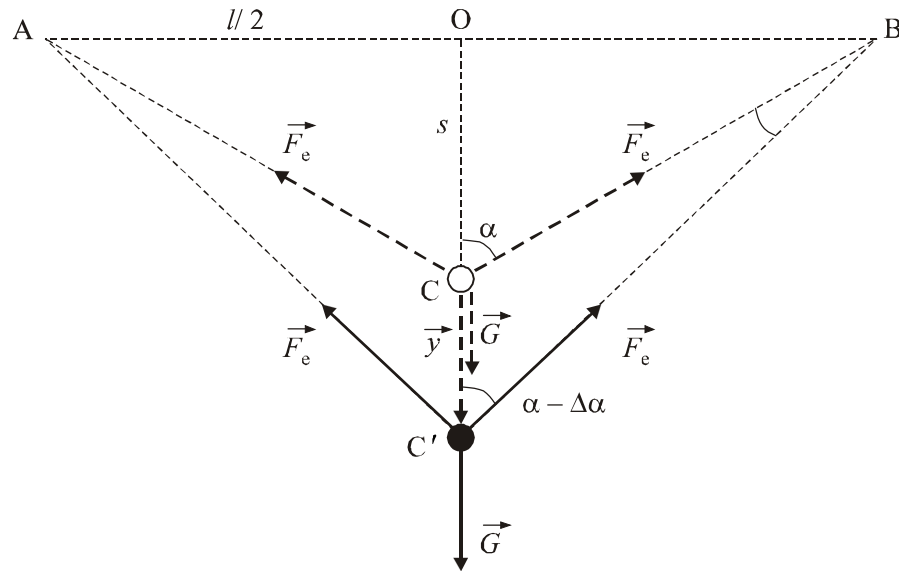


Fig. 2

Punctul C' , foarte apropiat de punctul C , reprezintă o poziție oarecare a corpului din timpul oscilațiilor verticale liniare foarte mici pe care el le efectuează în jurul poziției de echilibru, atunci când $\overline{CC'} = \vec{y}$ reprezintă elongația mică a oscilației.

Deoarece y este foarte mic, modulele celor două forțe elastice de reacție în poziția C' nu diferă de valorile pe care le aveau în poziția C , în timp ce direcțiile lor, față de verticală, s-au schimbat, astfel încât rezultanta $\vec{R}$ a forțelor care acționează în poziția C' este diferită de zero, va fi orientată pe verticală în sus și va avea modulul:

$$R = 2F_e \cos(\alpha - \Delta\alpha) - mg,$$

unde $\Delta\alpha$ este foarte mic;

$$R = 2F_e(\cos\alpha\cos\Delta\alpha + \sin\alpha\sin\Delta\alpha) - mg;$$

$$R \approx 2F_e(\cos\alpha + \Delta\alpha\sin\alpha) - mg;$$

$$2F_e\cos\alpha = mg;$$

$$R = 2F_e\Delta\alpha\sin\alpha;$$

$$y = OC' - OC;$$

$$y = \frac{l}{2} [\text{ctg}(\alpha - \Delta\alpha) - \text{ctg}\alpha];$$

$$y \approx \frac{l}{2} \frac{\Delta\alpha}{\sin\alpha\sin(\alpha - \Delta\alpha)};$$

$$y \approx \frac{l}{2} \frac{\Delta\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$R = \frac{4F_e \sin^3\alpha}{l} y;$$

$$k = \frac{4F_e \sin^3\alpha}{l};$$

$$R = ky; \quad \vec{R} = -k\vec{y},$$

ceea ce dovedește că oscilațiile verticale ale punctului material atașat firului elastic sunt oscilații armonice;

$$k = m\omega^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2};$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{ml}{F_e \sin^3\alpha}}; \quad F_e = \frac{mg}{2\cos\alpha};$$

$$T = \frac{\pi}{\sin\alpha} \sqrt{\frac{2l}{g} \text{ctg}\alpha},$$

unde $\sin\alpha$ și $\text{ctg}\alpha$ se exprimă în funcție de s , stabilit la punctul a.

$$\text{b) } T = 2\pi \sqrt{\frac{MA}{mg}}$$

Problema3 Rezolvare

$$U = \sqrt{\frac{P^2}{U_1^2 \cos^2 \varphi_1} (R^2 + X_L^2) + \frac{2P}{\cos \varphi_1} (R \cos \varphi_1 + X_L \sin \varphi_1) + U_1^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{U} \left(\frac{RP}{U_1 \cos \varphi_1} + U_1 \cos \varphi_1 \right)$$

$$U \approx 339,81 \text{ V}; \cos \varphi \approx 0,52$$

Prof. Romulus Sfichi, Suceava

BAREM

1. Reprezentarea schemei instalației (vezi figura 1).

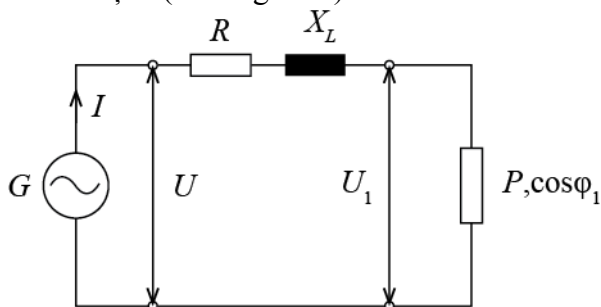


Fig. 1

Este necesar a fi determinată tensiunea efectivă U și cosinusul unghiului de defazaj între fazorii $\underline{U}$ și intensitatea curentului electric din circuit $\underline{I}$.

1 punct

2. Pentru rezolvarea problemei se întocmește diagrama fazorială a tensiunilor efective din circuit (fig. 2). Trebuie să determinăm U și $\cos \varphi$.

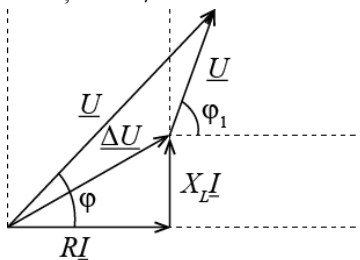


Fig. 2

3. Aplicăm legea (teorema) a doua a lui Kirchhoff circuitului, în mărimi fazoriale:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{\Delta U}, \quad (1)$$

în care $\underline{\Delta U}$ este căderea de tensiune pe cele două conductoare

$$\underline{\Delta U} = \underline{\Delta U}_R + \underline{\Delta U}_L = (R + X_L) \underline{I}, \quad (2)$$

în care $\underline{\Delta U}_R$ și $\underline{\Delta U}_L$ sunt fazorii componenți ai căderii de tensiune $\underline{\Delta U}$.

Substituind (2) în (1) se obține ecuația fazorială a tensiunilor din circuit

$$\underline{U} = (R + X_L) \underline{I} + \underline{U}_1 \quad (3)$$

1 punct

4. Proiectând (3) pe orizontală și verticală se obține un sistem de două ecuații scalare ce conțin $\underline{U}$ și φ :

$$\left. \begin{aligned} U \cos \varphi &= RI + U_1 \cos \varphi_1 \\ U \sin \varphi &= X_L I + U_1 \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

1 punct

5. Sistemul (4) poate fi rezolvat în raport cu U și $\cos \varphi$ explicitând intensitatea curentului I :

$$I = \frac{P}{U_1 \cos \varphi_1} \quad (5)$$

Substituind (5) în (4) – sistemul se transcrie sub forma:

$$\left. \begin{aligned} U \cos \varphi &= \frac{RP}{U_1 \cos \varphi_1} + U_1 \cos \varphi_1 \\ U \sin \varphi &= \frac{X_L P}{U_1 \cos \varphi_1} + U_1 \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

1 punct

Pentru determinarea tensiunii U vom ridica la pătrat cele două ecuații din (6) și apoi le adunăm obținându-se:

$$U^2 = \frac{R^2 P^2}{U_1^2 \cos^2 \varphi_1} + 2RP + U_1^2 \cos^2 \varphi_1 + \frac{X_L^2 P^2}{U_1^2 \cos^2 \varphi_1} + 2X_L P \operatorname{tg} \varphi_1 + U_1^2 \sin^2 \varphi_1,$$

din care

$$U = \sqrt{\frac{P^2}{U_1^2 \cos^2 \varphi_1} (R^2 + X_L^2) + 2P(R + X_L \operatorname{tg} \varphi_1) + U_1^2},$$

sau

$$U = \sqrt{\frac{P^2}{U_1^2 \cos^2 \varphi_1} (R^2 + X_L^2) + \frac{2P}{\cos \varphi_1} (R \cos \varphi_1 + X_L \sin \varphi_1) + U_1^2} \quad (7)$$

2 puncte

6. Factorul de putere al întregului circuit (al generatorului) rezultă din prima ecuație a sistemului adus la forma (6):

$$\cos \varphi = \frac{1}{U} \left(\frac{RP}{U_1 \cos \varphi_1} + U_1 \cos \varphi_1 \right) \quad (8)$$

1 punct

7. Substituind valorile numerice în (7) și (8) se obțin:

$$U = \sqrt{\frac{4,5^2 \cdot 10^6}{220^2 \cdot 0,8^2} (3^2 + 4^2) + \frac{2 \cdot 4,5 \cdot 10^3}{0,8} (3 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,6) + 220^2} \approx 339,81 \text{ V}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{339,81} \left(\frac{3 \cdot 4,5 \cdot 10^3}{220 \cdot 0,8} + 220 \cdot 0,8 \right) \approx 0,52$$

2 puncte

Total = 1+1+1+1+2+1+2+1 p. din oficiu = 10 puncte

Clasa a XII-a

Problema 1. Rezolvare

A. (3 puncte)

Conform enunțului putem scrie relațiile $d \sin \theta_{k+1} = (k+1)\lambda$, $d \sin \theta_k = k\lambda$, și, prin diferența lor, găsim $\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k = \lambda/d$. În general $\sin \theta = m\lambda/d \leq 1$, astfel că cea mai mare valoare posibilă a lui m este d/λ , corespunzând lui $\theta \rightarrow 90^\circ$. Putem scrie $m_{\max} = d/\lambda = (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k)^{-1} = 6,68$. Ca întreg posibil $m_{\max} = 6$.

B. (6 puncte=2 (raționament clasic)+4 (raționament relativist))

a) Timpul trecerii prin bara statică A este $t = \ell/c'$, unde $c' = c/n$; astfel $t = \ell n/c$. În acest interval de timp bara B se deplasează pe distanța $x = vt = vn\ell/c$. Cu această distanță se micșorează drumul luminii prin aer, în comparație cu drumul parcurs de lumină prin aer când bara era fixă. Înseamnă că timpul în care lumina ajunge la ecran pe drumul B se micșorează cu $\Delta t = x/c = vn\ell/c^2$. Numeric obținem: $\Delta t = 1.10^{-17}$ s.

b) Dacă raționăm în limbajul relativității resprânse, viteza luminii (fotonilor) prin bara mobilă (B) nu este $c' = c/n$ ci cea rezultată prin compunerea relativistă a vitezelor, anume $c'' = \frac{c' + v}{1 + c'v/c^2} = \frac{c(c + nv)}{v + nc}$. În același timp, lungimea barei în referențialul exterior, fix, nu este egală cu ℓ ci cu $\ell' = \ell \sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Într-o abordare relativistă trebuie să ținem cont nu numai de scurtarea drumului parcurs de lumină (până la ecran) prin aer – datorită deplasării barei B – ci și de scurtarea drumului parcurs de lumină prin sticla barei B.

Avem $\tau = \ell' / c'' = \frac{\ell(v + nc)}{c(c + nv)} \sqrt{1 - (v/c)^2}$ și astfel $x = v\tau = v \frac{\ell(v + nc)}{c(c + nv)} \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Acum $\Delta t = x/c = \frac{v\ell(v + nc)}{c^2(c + nv)} \sqrt{1 - (v/c)^2}$, (*). Limita nerelativistă a acestei formule se obține considerând că $c \rightarrow \infty$. Obținem $\Delta t = \frac{v\ell c(v/c + n)}{c^3(1 + nv/c)} \sqrt{1 - (v/c)^2} \approx \frac{v\ell cn}{c^3} \cdot 1 \rightarrow \frac{v\ell n}{c^2}$, adică rezultatul precedent, stabilit la punctul a), printr-un studiu nerelativist. Valoarea numerică furnizată de formula (*) este $\Delta t = 9,99 \cdot 10^{-18}$ s.

Din oficiu1 punct

Total10 puncte

Problema 2. Întâlnirile navelor cosmice relativiste

Problema 2. Rezolvare

a) În figura 1 am considerat că nava B este un sistem de referință fix față de care, în acord cu enunțul problemei, navele A și C se deplasează cu vitezele $\vec{v}$ și respectiv $-\vec{v}$.

Ca urmare, distanța parcursă de A în raport cu B, de la întâlnirea A – B până la întâlnirea A – C, este egală cu distanța parcursă de C în raport cu B, de la întâlnirea C – A până la întâlnirea C – B.

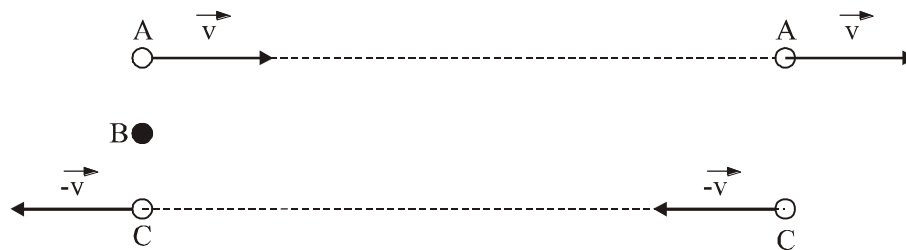


Fig. 1

Deplasarea navei A, de la întâlnirea cu B până la întâlnirea cu C, este un proces a cărui durată, măsurată cu ceasornicul lui A, se identifică chiar cu indicația t' a acestuia, reprezentând timpul propriu al ceasornicului lui A la întâlnirea cu C.

Durata aceluiași proces, măsurată cu ceasornicul lui B (din sistemul fix al navei B) este:

$$t_{1B} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

identificându-se chiar cu indicația ceasornicului lui B la întâlnirea lui A cu C.

De la întâlnirea navelor A și C, când, sincronizându-se cu ceasornicul lui A, ceasornicul lui C indică ora t' , și până la întâlnirea navelor C și B, deplasarea lui C în raport cu B reproduce, în sens invers, deplasarea lui A în raport cu B.

Ca urmare, durata deplasării navei C de la întâlnirea cu A și până la întâlnirea cu B, măsurată cu ceasornicul lui C este t' , astfel încât indicația ceasornicului lui C la întâlnirea cu nava B este $t_C = 2t'$, reprezentând timpul propriu al navei C la întâlnirea cu B.

Durata aceluiași proces, determinată cu ceasornicul lui B (din sistemul fix al navei B) va fi:

$$t_{2B} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t_{1B},$$

astfel încât indicația ceasornicului lui B la întâlnirea cu C este:

$$t_B = t_{1B} + t_{2B} = \frac{2t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Diferența indicațiilor ceasornicelor din B și C la întâlnirea navelor B și C este:

$$\Delta t = t_B - t_C = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) t'.$$

În variantă nerelativistă, $\Delta t = 0$.

b) Adoptând ca sistem inerțial fix, sistemul S din figura 2, atașat steii Σ față de care cele trei nave sunt în mișcări rectilinii și uniforme, iar ca sistem inerțial mobil, sistemul S' atașat navei B, vitezele navelor A și C în raport cu nava B (în raport cu sistemul mobil S') sunt date de relațiile vectoriale:

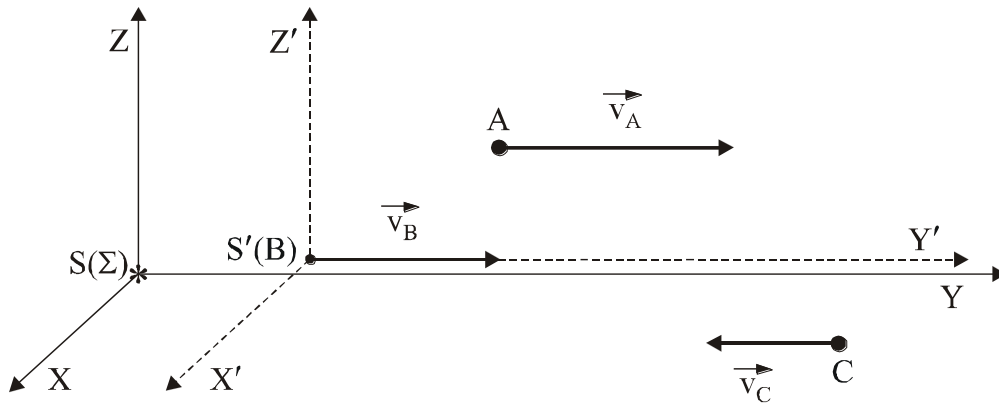


Fig. 2

$$\vec{v}_{AB} = \frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{1 - \frac{\vec{v}_A \vec{v}_B}{c^2}} = \frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}};$$

$$\vec{v}_{CB} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{1 - \frac{\vec{v}_C \vec{v}_B}{c^2}} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{1 + \frac{v_C v_B}{c^2}};$$

$$\vec{V}_{AB} = \left(1 - \frac{v_A v_B}{c^2}\right) \vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B;$$

$$\vec{V}_{CB} = \left(1 + \frac{v_C v_B}{c^2}\right) \vec{v}_{CB} = \vec{v}_C - \vec{v}_B.$$

Utilizând desenul din figura 3 rezultă:



Fig. 3

$$V_{AB} = v_A - v_B = \left(1 - \frac{v_A v_B}{c^2}\right) v_{AB};$$

$$v_{AB} = \frac{v_A - v_B}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}};$$

$$V_{CB} = v_C + v_B = \left(1 + \frac{v_C v_B}{c^2}\right) v_{CB};$$

$$v_{CB} = \frac{v_C + v_B}{1 + \frac{v_C v_B}{c^2}};$$

$$v_{AB} = v_{CB};$$

$$\frac{v_A - v_C}{c^2} v_B^2 - 2 \left(1 - \frac{v_A v_C}{c^2} \right) v_B + (v_A - v_C) = 0;$$

$$(v_B)_{1,2} = \frac{c^2 - v_A v_C}{v_A - v_C} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2 - v_A v_C}{v_A - v_C} \right)^2 - c^2};$$

$$v_B < c;$$

$$v_B = \frac{c^2 - v_A v_C}{v_A - v_C} - \sqrt{\left(\frac{c^2 - v_A v_C}{v_A - v_C} \right)^2 - c^2}.$$

c) Adoptând ca sistem inerțial fix, sistemul S din figura 4, atașat stelei Σ , față de care navele A și B sunt în mișcări rectilinii și uniforme, iar ca sistem inerțial mobil, sistemul S', atașat navei A (în mișcare față de sistemul fix cu viteza $\vec{v}_A = \vec{v}_0$), atunci vitezele navei B în raport cu nava A (în raport cu sistemul mobil S'), $\vec{v}_{BA} = \vec{v}'$ și în raport cu steaua Σ , $\vec{v}_B = \vec{v}$, au componentele:

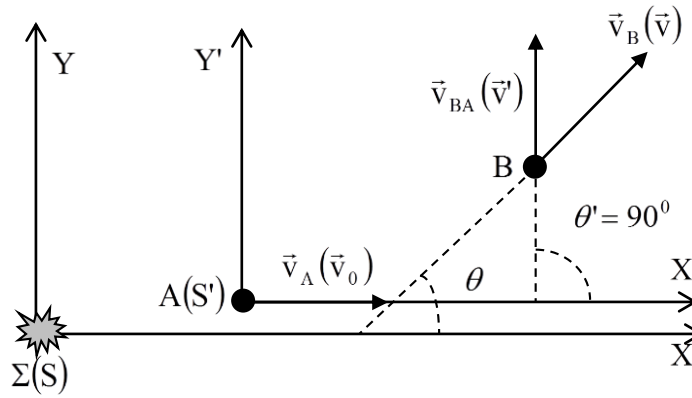


Fig. 4

$$(v')_{X'} = 0; (v')_{Y'} = v_{BA};$$

$$(v)_X = v_B \cos \theta; (v)_Y = v_B \sin \theta,$$

relațiile dintre acestea fiind :

$$(v)_X = \frac{(v')_{X'} + v_0}{1 + \frac{v_0 (v')_{X'}}{c^2}}; (v)_Y = \frac{(v')_{Y'}}{1 + \frac{v_0 (v')_{X'}}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}};$$

$$v_B \cos \theta = v_A;$$

$$v_B \sin \theta = v_{BA} \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}.$$

În aceste condiții, rezultă:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2} \right)};$$

$$\tan \theta = \frac{v_{BA}}{v_A} \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}.$$

Variantă nerelativistă:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2}; \quad \tan \theta = \frac{v_{BA}}{v_A}.$$

Problema 3

Rezolvare:

Se cunosc:

1p.....oficiu

$$\lambda_B = \frac{h}{p}; \dots\dots\dots 1p \quad (1)$$

$$W_{\text{totală electron}} = E_c + m_0 c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \dots\dots\dots 2p \quad (2)$$

Scoțând impulsul p din (2) și introducându-l în (1), rezultă

$$\lambda_B = \frac{hc}{\sqrt{E_c (E_c + 2m_0 c^2)}} \dots\dots\dots 2p \quad (3)$$

Radiația electromagnetică de frânare are lungimea de undă minimă când toată energia cinetică a electronului trece în energia fotonului radiat, deci

$$\lambda_f = \frac{hc}{E_c} \dots\dots\dots 2p \quad (4)$$

Ținând seama de expresiile (3) și (4), rezultă

$$\frac{2\lambda_f \cdot \lambda_B^2}{\lambda_f^2 - \lambda_B^2} = \frac{h}{m_0 c} = \Lambda, \dots\dots\dots 2p$$

adică lungimea de undă Compton pentru electron.