

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. TÊTEL

(30 pont)

- 5p** 1. Mutasd ki, hogy $2(\sqrt{7}+1)-\sqrt{28}$ természetes szám!
- 5p** 2. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ függvény esetén számítsd ki $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$ értékét!
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $4^{x+1} = 16$ egyenletet!
- 5p** 4. Véletlenszerűen választva egy elemet az $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ halmazból, számítsd ki annak a valószínűségét, hogy ez a szám a 7 többszöröse legyen!
- 5p** 5. Adottak az A , B és C pontok, úgy, hogy $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j}$ és $\overrightarrow{BC} = \vec{i} - \vec{j}$. Számítsd ki az \overrightarrow{AC} vektor hosszát!
- 5p** 6. Határozd meg $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ értékét, tudva azt, hogy $\frac{3\sin x - 2\cos x}{\cos x} = 1$!

II. TÊTEL

(30 pont)

1. Minden x valós számra adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ mátrix.
- 5p** a) Számítsd ki a $\det(A(2))$ értékét!
- 5p** b) Mutasd ki, hogy $A(1) \cdot A(2) = 5A(1)$!
- 5p** c) Határozd meg azon x valós számokat, melyekre a $\det(A(x)) = 0$!
2. Adott az $f = X^3 - 2X^2 - 2X + m$ polinom, ahol m egy valós szám.
- 5p** a) Ha $m = 3$, számítsd ki $f(1)$ értékét!
- 5p** b) Határozd meg az m valós számot, tudva, hogy az f polinomnak $X - 2$ polinommal való osztási maradéka 2!
- 5p** c) Ha $m = 4$, mutasd ki, hogy $(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 1$, ahol x_1, x_2, x_3 az f polinom gyökei!

III. TÊTEL

(30 pont)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$ függvény.
- 5p** a) Számítsd ki $f'(x)$ értékét, ha $x \in (0, +\infty)$!
- 5p** b) Számítsd ki $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ értékét!
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy az f függvény konvex a $(0, +\infty)$ intervallumon!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ függvény.
- 5p** a) Mutasd ki, hogy $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2$!
- 5p** b) Számítsd ki $\int_0^1 x f'(x) dx$ értékét!
- 5p** c) Határozd meg a $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ függvény grafikus képének az Ox tengely körüli elforgatásából származó test térfogatát!