

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026
CLASA a X-a

H2

Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiecte propuse de *Carp Cezar Nicolae*, Câmpulung Moldovenesc

1. (20p) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) (10p) $2 \cdot 2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 2 = 0$;

b) (10p) $2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 2(x-1) = 0$.

Soluție: **a)** Notăm $t = 2^x, t > 0$ ecuația devine $2t^2 + 3t - 2 = 0$ cu soluțiile $t_1 = \frac{1}{2}$ și $t_2 = -2 < 0$ nu

convine. Rezultă $2^x = \frac{1}{2}$ și $x = -1$.

b) $(x-1)[2(x-1)^2 + 3(x-1) - 2] = 0$ de unde obținem $x_1 = 1$ și ecuația

$2(x-1)^2 + 3(x-1) - 2 = 0$ care are soluțiile $x-1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$ și $x-1 = -2$, $x_3 = -1$.

Barem

a) Rezolvarea ecuației $2t^2 + 3t - 2 = 0$ cu soluțiile $t_1 = \frac{1}{2}$ și $t_2 = -2 < 0$, t_2 nu convine.	5 p
$2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$.	5 p
b) $(x-1)[2(x-1)^2 + 3(x-1) - 2] = 0 \Rightarrow x-1 = 0$, de unde $x = 1$ sau	5 p
$2(x-1)^2 + 3(x-1) - 2 = 0$ care are soluțiile $x-1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$ și $x-1 = -2$, $x_3 = -1$.	5p

2. (20p) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2026 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - 2026x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Să se arate că funcția f este injectivă.

Soluție: Dacă $x, y \in \mathbb{Q}$ cu $x \neq y \Rightarrow 2026 - x \neq 2026 - y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Dacă $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cu $x \neq y \Rightarrow 1 - 2026x \neq 1 - 2026y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Dacă $x \in \mathbb{Q}$ și $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow x \neq y$. Dar $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Q}$ și $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$

$f(y) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ prin urmare $f(x) \neq f(y)$. Deci f este injectivă.

Barem

Dacă $x, y \in \mathbb{Q}$ cu $x \neq y \Rightarrow 2026 - x \neq 2026 - y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$	5 p
Dacă $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cu $x \neq y \Rightarrow 1 - 2026x \neq 1 - 2026y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$	5 p
Dacă $x \in \mathbb{Q}$ și $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow x \neq y$. Dar $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Q}$ și $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(y) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ prin urmare $f(x) \neq f(y)$. Deci f este injectivă.	10p

3. (20p) Pentru fiecare număr real a , definim numărul complex $z_a = \frac{1+ai}{a+i}, i^2 = -1$.

a) (10p) Demonstrați că $|z_a| = 1$ și $z_a \neq i$ pentru orice număr real a .

b) (5p) Să se arate că dacă $z_a \in \mathbb{Z}$ atunci $a \in \{-1; 1\}$.

c) (5p) Se consider numărul $n = z_2 \cdot z_{\frac{1}{2}} \cdot z_3 \cdot z_{\frac{1}{3}} \cdot \dots \cdot z_{2026} \cdot z_{\frac{1}{2026}}$. Să se arate că $n = 1$.

Soluție: a) $|z_a| = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{a^2+1}} = 1$, și dacă $z_a = i \Rightarrow 1+ai = ai-1$ fals $\Rightarrow z_a \neq i$.

b) $z_a = \frac{2a}{a^2+1} + \frac{a^2-1}{a^2+1} \cdot i$, $z_a \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2-1=0 \Rightarrow a \in \{-1; 1\}$ care convin.

c) $z_a \cdot z_{\frac{1}{a}} = \frac{1+ai}{a+i} \cdot \frac{1+\frac{1}{a}i}{\frac{1}{a}+i} = \frac{1+ai}{a+i} \cdot \frac{\frac{a+i}{a}}{\frac{1+ai}{a}} = 1$ pentru orice număr real $a \Rightarrow n = 1$.

Barem

a) $ z_a = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{a^2+1}} = 1$	5 p
$z_a = i \Rightarrow 1+ai = ai-1$ fals $\Rightarrow z_a \neq i$	5 p
b) $z_a = \frac{2a}{a^2+1} + \frac{a^2-1}{a^2+1} \cdot i$	2 p
$z_a \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2-1=0 \Rightarrow a \in \{-1; 1\}$	3 p
c) $z_a \cdot z_{\frac{1}{a}} = 1$ pentru orice număr real $a \Rightarrow n = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$	5 p

4. (30p) O cultură bacteriană inițial conține 500 de bacterii și crește exponențial cu o rată care dublează populația la fiecare 30 de minute în primele 2 ore, după care rata de dublare scade la fiecare 45 de minute datorită acumulării de toxine. În plus, după primele 60 de minute, 10% din bacterii mor la fiecare oră din cauza condițiilor de mediu.

Presupunând că nu există factori limitanți și folosind formula pentru creșterea exponențială $N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$, unde $N(t)$ este numărul de bacterii după t minute, N_0 este numărul inițial de bacterii, iar T este timpul de dublare, aflați:

a) (15p) numărul de bacterii după 2 ore.

b) (15p) numărul de bacterii după 3 ore.

(Se va folosi aproximarea $\sqrt[3]{16} \approx 2,5$).

Soluție:

a) Creștere în primele 120 minute (2 ore) : $N_0 = 500$, $t = 120$, $T = 30 \Rightarrow$

$$N(120) = 500 \cdot 2^{\frac{120}{30}} = 500 \cdot 2^4 = 8000 \text{ bacterii.}$$

$$\text{Cum } 10\% \text{ mor dupa } 120 \text{ minute, rămân } \frac{90}{100} \cdot 8000 = 7200 \text{ bacterii.}$$

b) Creștere în intervalul 120-180 minute (următoarea oră): $N_0 = 7200$, $t = 60$, $T = 45$

$$N(180) = 7200 \cdot 2^{\frac{60}{45}} = 7200 \cdot 2^{\frac{4}{3}} = 7200 \cdot \sqrt[3]{16} \approx 7200 \cdot 2,5 = 18000 \text{ bacterii}$$

Cum 10% mor, deci rămân 90%, adică 16.200 bacterii

Barem

<p>a) Creștere în primele 120 minute (2 ore) : $N_0 = 500$, $t = 120$, $T = 30 \Rightarrow$</p> $N(120) = 500 \cdot 2^{\frac{120}{30}} = 500 \cdot 2^4 = 8000 \text{ bacterii.}$ <p>Cum 10% mor dupa 120 minute, rămân $\frac{90}{100} \cdot 8000 = 7200$ bacterii.</p>	<p>5 p</p> <p>5 p</p> <p>5 p</p>
<p>b) Creștere în intervalul 120-180 minute (următoarea oră): $N_0 = 7200$, $t = 60$, $T = 45$</p> $N(180) = 7200 \cdot 2^{\frac{60}{45}} = 7200 \cdot 2^{\frac{4}{3}} = 7200 \cdot \sqrt[3]{16} \approx 7200 \cdot 2,5 = 18000$ <p>Cum 10% mor, deci rămân 90%, adică 16.200 bacterii</p>	<p>5 p</p> <p>5 p</p> <p>5 p</p>

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.