

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 7 februarie 2026
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a X-a

1. (21p) Dacă numerele reale x, y, z au suma nulă, să se arate că pentru orice număr $a \in (0, +\infty)$, are loc inegalitatea: $\log_2(a^x + a^y) + \log_2(a^y + a^z) + \log_2(a^z + a^x) \geq 3$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție și barem:

Avem $\log_2(a^x + a^y) + \log_2(a^y + a^z) + \log_2(a^z + a^x) = \log_2((a^x + a^y)(a^y + a^z)(a^z + a^x)) =$
 $\log_2(2a^{x+y+z} + a^{2x+y} + a^{2y+z} + a^{2z+x} + a^{2y+x} + a^{2z+y} + a^{2x+z}) = \log_2(2 + a^{x-z} + a^{y-z} + a^{y-x} + a^{z-x} + a^{z-y} + a^{x-y})$
13 puncte

Deoarece $a^{x-y} + a^{y-x} \geq 2, a^{z-y} + a^{y-z} \geq 2, a^{z-x} + a^{x-z} \geq 2$, obținem:

$\log_2(a^x + a^y) + \log_2(a^y + a^z) + \log_2(a^z + a^x) \geq \log_2(2 + 2 + 2 + 2) = 3$.
8 puncte

2. a) (8p) Demonstrați că, pentru orice numere complexe z_1, z_2 , au loc inegalitățile:

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

b) (13p) Determinați numerele complexe z pentru care $2|z^2 + z + 1| + |z^3| \leq 1$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție și barem:

a) Demonstrează $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$ 4 puncte

Demonstrează $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 4 puncte

b) Din enunț deducem $|z|^3 \leq 2|z^2 + z + 1| + |z^3| \leq 1 \Rightarrow |z| \leq 1$ 4 puncte

$|z^2 + z + 1| \leq 1 - |z^3| - |z^2 + z + 1| \leq |z^3 - 1 + z^2 + z + 1| = |z| \cdot |z^2 + z + 1| \Rightarrow |z^2 + z + 1| \leq |z| \cdot |z^2 + z + 1|$
 4 puncte

Dacă $z^2 + z + 1 \neq 0$, atunci $|z| \geq 1$, deci $|z| = 1$. Înlocuind în inegalitatea din enunț deducem că

$2|z^2 + z + 1| \leq 0 \Rightarrow z^2 + z + 1 = 0$, ceea ce este în contradicție cu presupunerea făcută. Prin urmare,

$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z \in \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$ 5 puncte

3. (21p) Să se determine funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ astfel încât $(a+b)f(x) = af(f(x)) + bx$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, unde $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ și a, b sunt numere prime între ele.

Anca Andrei, Suceava

Soluție și barem:

Relația din ipoteză se scrie în forma echivalentă

$a(f(f(x)) - f(x)) = b(f(x) - x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ 5 puncte

Fie funcția $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = f(x) - x$ și relația din ipoteză se scrie în forma $ag(f(x)) = bg(x) \Rightarrow$

$$g(g(x) + x) = \frac{b}{a}g(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

În (1) luăm $x = n \in \mathbb{Z}$ și notăm $g(n) = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(k + n) = \frac{b}{a} \cdot k$.

Notăm $k + n = h_1 \Rightarrow g(h_1) = \frac{b}{a} \cdot k \Rightarrow a / k$.

În (1) luăm $x = h_1 \in \mathbb{Z}$ și notăm $g(h_1) + h_1 = h_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(h_2) = \frac{b}{a} \cdot g(h_1) \Rightarrow g(h_2) = \frac{b^2}{a^2} \cdot k \Rightarrow a^2 / k$.

În (1) luăm $x = h_2 \in \mathbb{Z}$ și notăm $g(h_2) + h_2 = h_3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(h_3) = \frac{b}{a} \cdot g(h_2) \Rightarrow g(h_3) = \frac{b^3}{a^3} \cdot k \Rightarrow a^3 / k$.

Dacă notăm $h_t = g(h_{t-1}) + h_{t-1}$, $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$, se arată prin inducție după t că $g(h_t) = \frac{b^t}{a^t} \cdot k$, $\forall t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$, de unde rezultă că a^t / k , $\forall t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow g(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

.....16 puncte

4. (21p) Considerăm funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5^x + 9^{\frac{1}{x}}$.

a) **(5p) Arătați că $5^{\log_5 9} \in \mathbb{Q}$;**

b) **(6p) Arătați că $f(\log_5 3) \in \mathbb{N}$;**

c) **(10p) Arătați că funcția este strict crescătoare pe intervalul $[\sqrt{\log_5 9}, +\infty)$.**

Supliment G. M. B. 10/2025

Soluție și barem:

a) $5^{\log_5 9} = 9 \in \mathbb{Q}$ 5 puncte

b) $f(\log_5 3) = 5^{\log_5 3} + 9^{\frac{1}{\log_5 3}} = 5^{\log_5 3} + 9^{\log_3 5} = 3 + 5^{\log_3 9} = 3 + 5^2 = 28 \in \mathbb{N}$ 6 puncte

c) Fie $x_1, x_2 \in [\sqrt{\log_5 9}, +\infty)$, $x_1 < x_2$. Avem:

$f(x_2) - f(x_1) = 5^{x_2} - 5^{x_1} + 9^{\frac{1}{x_2}} - 9^{\frac{1}{x_1}} = 5^{x_1} (5^{x_2 - x_1} - 1) - 9^{\frac{1}{x_2}} \left(9^{\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}} - 1 \right)$ 5 puncte

Deoarece $x_1 x_2 > \log_5 9$ și $x_2 - x_1 > 0$, avem $9^{\frac{1}{x_2}} = 5^{\frac{1}{x_2} \log_5 9} < 5^{x_1}$ și $5^{x_2 - x_1} - 1 > 9^{\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}} - 1 > 0$, de unde rezultă că $f(x_2) > f(x_1)$, adică funcția este strict crescătoare pe intervalul $[\sqrt{\log_5 9}, +\infty)$5 puncte

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.