

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 7 februarie 2026
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a XI-a

1. (21p) Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (5p) Arătați că $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3$.

b) (8p) Demonstrați că A este matrice inversabilă și determinați A^{-1} .

c) (8p) Rezolvați în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ecuația $AXA = I_3$.

* * *

Soluție.

a) Prin calcul direct obținem succesiv $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ și apoi

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_3, \text{ de unde } A^2 - 5A + 4I_3 = O_3.$$

b) Egalitatea de la punctul a) poate fi scrisă sub forma $\frac{1}{4}(5I_3 - A) \cdot A = I_3$, (1). Trecând la determinanți, obținem $\det(A) \neq 0$, deci A este inversabilă. Înmulțind (1) la dreapta cu A^{-1} , rezultă $\frac{1}{4}(5I_3 - A) = A^{-1}$,

de unde obținem $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Înmulțind egalitatea $AXA = I_3$, la stânga și la dreapta, cu A^{-1} obținem $X = (A^{-1})^2$, de unde rezultă

$$X = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Barem.

a) Calculează A^2	2p
Finalizare	3p
b) Obține $\det(A) \neq 0$, deci A este inversabilă	4p
Obține $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	4p
c) Înmulțește egalitatea $AXA = I_3$, la stânga și la dreapta, cu A^{-1} și obține $X = (A^{-1})^2$	4p

Obține $X = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix}$	4p
--	----

2. (21p) Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ notăm $\delta = \det(A)$ și $t = \text{Tr}(A)$.

a) (11 puncte) Arătați că $\det(A^2 + \delta I_2) = t^2 \delta$.

b) (10 puncte) Arătați că $\det(A^2 + A - \delta I_2) + \det(A^2 + \delta I_2) = 4\delta^2 + \delta$.

Anca Andrei, Suceava

Soluție.

a) Din relația Hamilton- Cayley avem $A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, iar de aici obținem $A^2 + \delta I_2 = tA$. Trecând la determinanți, rezultă $\det(A^2 + \delta I_2) = \det(tA) = t^2 \cdot \det(A) = t^2 \delta$.

b) Dacă notăm cu A^* adjuncta matricei A , atunci $A \cdot A^* = \delta I_2$, prin urmare avem $A^2 + A - \delta I_2 = A^2 + A - A \cdot A^* = A(A + I_2 - A^*)$. Rezultă $\det(A^2 + A - \delta I_2) = \delta \cdot \det(I_2 + A - A^*)$, (1).

Luând $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avem $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ și $I_2 + A - A^* = \begin{pmatrix} 1+a-d & 2b \\ 2c & 1-a+d \end{pmatrix}$. Deducem că $\det(I_2 + A - A^*) = 1 - (a-d)^2 - 4bc = 1 - (a+d)^2 + 4(ad-bc) = 1 - t^2 + 4\delta$. Din relația (1) și relația demonstrată la punctul a) deducem că $\det(A^2 + A - \delta I_2) + \det(A^2 + \delta I_2) = \delta(1 - t^2 + 4\delta) + t^2 \delta = 4\delta^2 + \delta$.

Barem.

a) $A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 + \delta I_2 = tA$	5p
$\det(A^2 + \delta I_2) = \det(tA) = t^2 \cdot \det(A) = t^2 \delta$	6p
b) $A^2 + A - \delta I_2 = A(A + I_2 - A^*) \Rightarrow \det(A^2 + A - \delta I_2) = \delta \cdot \det(I_2 + A - A^*)$	4p
Obține $\det(I_2 + A - A^*) = 1 - t^2 + 4\delta$	4p
Finalizare	2p

3. (21p) Fie $a \in [1, \infty)$ și $b \in [3, \infty)$. Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$x_1 = a \text{ și } x_{n+1} = x_n + b\sqrt{x_n} + \sqrt{\frac{n}{x_n}}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) (11p) Demonstrați că $x_n \geq n^2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) (10p) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = \frac{b^2}{4}$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție.

a) Demonstrăm prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$. Din ipoteză avem $x_1 = a \geq 1$, deci $x_1 \geq 1^2$.

Dacă $x_n \geq n^2$, atunci $\sqrt{x_n} \geq n$ și $\sqrt{\frac{n}{x_n}} > 0$, prin urmare avem succesiv:

$$x_{n+1} = x_n + b\sqrt{x_n} + \sqrt{\frac{n}{x_n}} \geq n^2 + 3n \geq n^2 + 2n + 1, \text{ de unde } x_{n+1} \geq (n+1)^2.$$

b) Inegalitatea de la punctul a) conduce la $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x_n}} = 0$. Tot din a) obținem

$$0 \leq \frac{n}{x_n} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ de unde } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n} = 0. \text{ Este suficient să demonstrăm că } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n} = \frac{b}{2}.$$

Folosim criteriul Stolz-Cesàro: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b\sqrt{x_n} + \sqrt{\frac{n}{x_n}}}{\sqrt{x_n + b\sqrt{x_n} + \sqrt{\frac{n}{x_n}}} + \sqrt{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{n}{x_n}}{\sqrt{1 + \frac{b}{\sqrt{x_n}} + \frac{1}{x_n} \sqrt{\frac{n}{x_n}}} + 1} = \frac{b}{2}.$$

Barem.

a) $x_1 = a \geq 1$, deci $x_1 \geq 1^2$	4p
$x_{n+1} = x_n + b\sqrt{x_n} + \sqrt{\frac{n}{x_n}} \geq n^2 + 3n \geq n^2 + 2n + 1$, de unde $x_{n+1} \geq (n+1)^2$	7p
b) Argumentează că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x_n}} = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n} = 0$	4p
<p>Calculează $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}} =$</p> $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b\sqrt{x_n} + \sqrt{\frac{n}{x_n}}}{\sqrt{x_n + b\sqrt{x_n} + \sqrt{\frac{n}{x_n}}} + \sqrt{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{n}{x_n}}{\sqrt{1 + \frac{b}{\sqrt{x_n}} + \frac{1}{x_n} \sqrt{\frac{n}{x_n}}} + 1} = \frac{b}{2},$ <p>de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = \frac{b^2}{4}$</p>	6p

4. (21p) Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică simultan condițiile:

- i) $f(x) \geq x+1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- ii) $f(2x) \geq (f(x))^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- iii) $f(x) \cdot f(-x) \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Se consideră cunoscut faptul că $e^x \geq x+1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică

Soluție.

Înlocuind x cu $\frac{x}{2}$ în ii), obținem $f(x) \geq \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (1). Rezultă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Fie $x \in \mathbb{R}$, arbitrar dar fixat. Inductiv, folosind (1), obținem $f(x) \geq \left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (2).

Din condiția i) rezultă $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \geq 1 + \frac{x}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (3). Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{2^n} = 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$1 + \frac{x}{2^n} > 0$, $\forall n \geq n_0$. Relațiile (2) și (3) conduc la $f(x) \geq \left(1 + \frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$, pentru orice $n \geq n_0$, iar de aici

rezultă $f(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{2^n}\right)^{2^n} = e^x$. Cum x a fost ales arbitrar, obținem $f(x) \geq e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (4).

Înmulțind membru cu membru inegalitățile $f(-x) \geq e^{-x} > 0$ și $f(x) \geq e^x > 0$, obținem $f(x) \cdot f(-x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, inegalitate care, împreună cu condiția iii) din ipoteză conduce la

$f(x) \cdot f(-x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă $\frac{1}{f(x)} = f(-x) \geq e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, de unde $f(x) \leq e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (5).

Din (4) și (5) obținem $f(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Această funcție verifică cele trei condiții din ipoteză.

Barem.

Demonstrează $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$	5p
Demonstrează $f(x) \geq e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$	8p
Demonstrează $f(x) \leq e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$	6p
Finalizare	2p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.