

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026
CLASA a XII-a

H1

Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. (20p) Pe \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - a(x + y) + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) (10p) Determinați a astfel ca $M = [a, +\infty)$ să fie parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \circ ".

b) (10p) Pentru $a = -2$ determinați $t \in M$ pentru care $t \circ t \circ t \circ t = 2(8 \cdot 1012^4 - 1)$.

prof. Moisuc Niculina-Mihaela, Rădăuți

Barem:

1.a)	Prelucrăm egalitatea : $x \circ y = xy - a(x + y) + 2 = xy - ax - ay + 2 = (x - a)(y - a) - a^2 + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.	5p
	Condiția ca $M = [a, +\infty)$ să fie parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \circ " \Leftrightarrow $\Leftrightarrow (x - a)(y - a) - a^2 + 2 > -a^2 + 2 \geq a \Leftrightarrow a^2 + a - 2 \leq 0 \Leftrightarrow a \in [-2, 1]$.	5p
1.b)	Legea o putem scrie $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2$ și cum legea este asociativă vom avea $t \circ t \circ t \circ t = 2^4 \cdot 1012^4 - 2 \Rightarrow (t + 2)^4 - 2 = (2 \cdot 1012)^4 - 2 \Rightarrow (t + 2)^4 = 2024^4 \Rightarrow t + 2 = \pm 2024$ Cu soluția $t = 2026 \in M$	5p 5p

2. (20p) Fie mulțimea $G = (0; 1)$ și legea de compoziție " $*$ " definită prin $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$,

oricare ar fi $x, y \in G$.

a) (6p) Rezolvați în G ecuația $x * \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$.

b) (7p) Arătați că $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție " $*$ ".

c) (7p) Determinați simetricul lui $\frac{1}{2026}$ în raport cu legea de compoziție " $*$ ".

Prof. Tomasciuc Lenuța, Suceava

Barem:

2.a)	Cum $x * \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\frac{x}{3}}{\frac{2x}{3} - x - \frac{1}{3} + 1} = \frac{3}{4}$	3p
	$\Rightarrow \frac{x}{-x + 2} = \frac{3}{4}$ cu soluția $x = \frac{6}{7} \in G$	3p

2.b)	$x * \frac{1}{2} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} + 1} = x \text{ pentru } \forall x \in G$	3p
	$\frac{1}{2} * x = \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} - x + 1} = x \text{ pentru } \forall x \in G$	3p
	Deci $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție "*" 1p	
2.c)	Fie $x \in G$. Acesta este simetrizabil dacă există $x' \in G$ a. î. $x * x' = x' * x = e$, deci $x * x' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x' = 1 - x$. Cum $x \in (0; 1) \Rightarrow 0 < 1 - x < 1$ de unde $\forall x \in G$ este simetrizabil. 5p	
	$\left(\frac{1}{2026}\right)' = 1 - \frac{1}{2026} = \frac{2025}{2026}.$ Sau rezolvă ecuația $\frac{1}{2026} * x' = x' * \frac{1}{2026} = \frac{1}{2}$ 2p	

3. Se consideră funcția $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) (7p) Arătați că funcția $F : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$ este o primitivă a funcției f .

b) (7p) Calculați $\int_1^e \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) f(x) dx$.

c) (6p) Să se determine primitiva funcției f , al cărei grafic conține punctul $A(e^{-2}; e^{-1})$.

Prof. Cenușă Remus, Suceava

Barem:

3.a)	F este derivabilă și $F'(x) = [2\sqrt{x}(\ln x - 2)]' = (2\sqrt{x})'(\ln x - 2) + (2\sqrt{x})(\ln x - 2)'$ 3p	
	$\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2) + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = f(x)$, deci F este o primitivă a funcției f . 4p	
3.b)	$\int_1^e \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx + \int_1^e (\ln x)' \ln x dx$ 3p	
	$\frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx + \frac{\ln^2 x}{2} \Big _1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big _1^e + \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 3}{4}.$ 4p	
3.c)	Mulțimea primitivelor funcției f este mulțimea de funcții $F_k : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F_k(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + k, k \in \mathbb{R}$. 2p	

	Punem condiția $F_k(e^{-2}) = e^{-1}$, adică $-8e + k = e^{-1} \Rightarrow k = 9e^{-1}$. Deci primitiva căutată este $F_e(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + 9e^{-1}$.	4p
--	--	-----------

4. (30p) Apa unui lac contaminat este tratată cu un bactericid. Rata modificării numărului bacteriilor dăunătoare după t zile de la aplicarea tratamentului este modelată prin $B'(t) = -\frac{3000}{(1+0,2t)^2}$, $t \geq 0$, unde

B este numărul bacteriilor pe milimetru de apă și t este numărul de zile de tratament al apei. Numărul inițial al bacteriilor a fost egal cu 10000/mililitru. Determinați după câte zile numărul bacteriilor va fi cel mult egal cu 2500/mililitru.

Prof. Bedrulea Gabriela Victoria, Suceava

Barem:

4.	Pentru a găsi numărul de bacterii $B(t)$ integrăm $B'(t)$ în raport cu t : $B(t) = \int -\frac{3000}{(1+0,2t)^2} dt = -3000 \int (1+0,2t)^{-2} dt = \frac{15000}{1+0,2t} + C$ (sau substituție)	10p
	Folosim condiția inițială $\frac{15000}{1+0,2t} + C = 10000 \Rightarrow C = -5000$, $B(t) = \frac{15000}{1+0,2t} - 5000$	10p
	$\frac{15000}{1+0,2t} - 5000 \leq 2500$ se ajunge la $t \geq 5$. Așadar după cel puțin 5 zile, numărul bacteriilor va fi mai mic sau egal cu 2500/mililitru.	10p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.