

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**„ADOLF HAIMOVICI”**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026**  
**CLASA a XII-a**

**H2**

**Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

Subiecte propuse de *Busuioc Daniela Mariana*, Suceava

și de *Ursaciuc Mihaela*, Gura Humorului

**1. (20p)** Pe mulțimea  $G = [k, +\infty)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  se consideră legea de compoziție

$$x * y = 3xy - 3k(x + y) + k(3k + 1), \forall x, y \in G.$$

**a) (10p)** Să se demonstreze că legea de compoziție „\*” este asociativă și admite element neutru.

**b) (10p)** Pentru  $k = 2$  să se rezolve ecuația  $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 2026 ori}} = 2$ .

**Soluție:**

**a)** Din calcul direct se obține  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , pentru orice  $x, y, z$  din  $G$ . ..... (5 p)

Se obține elementul neutru  $e = k + \frac{1}{3} \in G$  ..... (5 p)

**b)**  $x * x = 3(x - 2)^2 + 2$ ,  $x * x * x = 3^2(x - 2)^3 + 2$ , ..... (4 p)

$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 2026 ori}} = 3^{2025}(x - 2)^{2026} + 2 = 2$ , de unde rezultă  $x = 2$  ..... (6 p)

**Barem**

a) Din calcul direct se obține $(x * y) * z = x * (y * z)$ , pentru orice $x, y, z$ din $G$ .	5p
Se obține elementul neutru $e = k + \frac{1}{3} \in G$	5p
b) $x * x = 3(x - 2)^2 + 2$ , $x * x * x = 3^2(x - 2)^3 + 2$ ,	4p
$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 2026 ori}} = 3^{2025}(x - 2)^{2026} + 2 = 2$ , de unde rezultă $x = 2$	6p

**2. (20p)** Se consideră funcția:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

**a) (10p)** Să se arate că funcția  $f$  verifică relația  $(e^{-x} \cdot f(x))' = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

**b) (10p)** Să se determine primitiva  $G$  a funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f(x) - f'(x)}{e^x}$ , cu proprietatea  $G(0) = 2026$ .

**Soluție:**

a) Verificarea relației ..... (10p)

$$\text{b) } \int \frac{f(x) - f'(x)}{e^x} dx = \int [f(x) \cdot e^{-x} - f'(x) \cdot e^{-x}] dx = \int (-e^{-x} f(x))' dx = -e^{-x} f(x) + C \dots\dots\dots (5p)$$

$$G(x) = -e^{-x} f(x) + c \text{ și } G(0) = 2026 \Rightarrow c = 2025 \Rightarrow G(x) = -e^{-x} f(x) + 2025 \dots\dots\dots (5p)$$

**Barem**

a) Verificarea relației	10p
b)	
$\int \frac{f(x) - f'(x)}{e^x} dx = \int [f(x) \cdot e^{-x} - f'(x) \cdot e^{-x}] dx = \int (-e^{-x} f(x))' dx = -e^{-x} f(x) + C$	5p
$G(x) = -e^{-x} f(x) + c \text{ și } G(0) = 2026 \Rightarrow c = 2025 \Rightarrow G(x) = -e^{-x} f(x) + 2025$	5p

3. (20p) Se consideră funcțiile:  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{2x} - 1$  și  $g(x) = \frac{f(x)}{2 \cdot e^x}$

a) (10p) Să se arate că  $\int_0^1 x \left( f\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right) dx = 1$ ;

b) (5p) Să se calculeze  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{g(x)} dx$ ;

c) (5p) Să se demonstreze că  $\int_{-2026}^{2026} \frac{f(x)}{e^{2x} + 1} dx = 0$

**Soluție:**

a)  $\int_0^1 x \cdot e^x dx = xe^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1 \dots\dots\dots (10p)$

b)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} dx = \ln |e^{2x} - 1| \Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln \frac{8}{3} \dots\dots\dots (5p)$

c) Se consideră funcția  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

$h(-x) = -h(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow h$  funcție impară  $\Rightarrow \int_{-2026}^{2026} h(x) dx = 0 \dots\dots\dots (5p)$

**Barem**

a) $\int_0^1 x \cdot e^x dx = xe^x \Big _0^1 - e^x \Big _0^1 = 1$	10p
b) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} dx = \ln  e^{2x} - 1  \Big _{\ln 2}^{\ln 3} = \ln \frac{8}{3}$	5p
c) Se consideră funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ $h(-x) = -h(x)$ , $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow h$ funcție impară $\Rightarrow \int_{-2026}^{2026} h(x) dx = 0$	5p

4. (30p) Pe mulțimea  $\mathbb{N}$  se consideră legea de compoziție  $x \circ y = u_c(xy)$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{N}$  (unde  $u_c(a)$  reprezintă ultima cifră a numărului natural  $a$ )

a) (10p) Dacă  $G = \{1, 3, 7, 9\}$ , arătați că  $G$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{N}$  în raport cu legea „ $\circ$ ”.

b) (20p) Demonstrați că  $(G, \circ)$  este grup abelian.

**Soluție:**

a)  $1 \circ 1 = 1, 1 \circ 3 = 3 \circ 1 = 3, 1 \circ 7 = 7 \circ 1 = 7, 1 \circ 9 = 9 \circ 1 = 9, 3 \circ 3 = 9,$

$3 \circ 7 = 7 \circ 3 = 1, 3 \circ 9 = 9 \circ 3 = 7, 7 \circ 9 = 9 \circ 7 = 3$  și  $9 \circ 9 = 1$ .

Rezultă  $x \circ y \in G$ , oricare ar fi  $x, y \in G$ ,

deci  $G$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{N}$  în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ” ..... (10p)

b) Din cele stabilite la a), deducem că tabla operației în  $G$  este:

$\circ$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

Legea de compoziție este comutativă ..... (5p)

Legea de compoziție este asociativă ..... (5p)

Elementul neutru este  $e = 1$  ..... (5p)

Orice element din  $G$  este simetrizabil ( $1' = 1, 3' = 7, 7' = 3, 9' = 9$ ) ..... (5p)

**Barem**

<p>a) <math>1 \circ 1 = 1, 1 \circ 3 = 3 \circ 1 = 3, 1 \circ 7 = 7 \circ 1 = 7, 1 \circ 9 = 9 \circ 1 = 9, 3 \circ 3 = 9,</math>  <math>3 \circ 7 = 7 \circ 3 = 1, 3 \circ 9 = 9 \circ 3 = 7, 7 \circ 9 = 9 \circ 7 = 3</math> și <math>9 \circ 9 = 1</math>.  Rezultă <math>x \circ y \in G</math>, oricare ar fi <math>x, y \in G</math>,  deci <math>G</math> este parte stabilă a lui <math>\mathbb{N}</math> în raport cu legea de compoziție „<math>\circ</math>”</p>	10p
<p>b) Din cele stabilite la a), se deduce tabla operației în <math>G</math>  Legea de compoziție este comutativă  Legea de compoziție este asociativă  Elementul neutru este <math>e = 1</math>  Orice element din <math>G</math> este simetrizabil (<math>1' = 1, 3' = 7, 7' = 3</math> și <math>9' = 9</math>)</p>	5p 5p 5p 5p

**Notă: Orice altă soluție se va puncta corespunzător.**