

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026
CLASA a IX-a

H2 Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiecte propuse de *Marinela Cristina Cimpoeșu*, Suceava

1. a) (10p) Să se demonstreze că $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{2}{x^2 + y^2}, \forall x, y > 0$.

b) (10p) Să se arate că $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} + \frac{y^2 + z^2}{y^4 + z^4} + \frac{z^2 + x^2}{z^4 + x^4} \leq x + y + z$, pentru orice numere reale $x, y, z > 0$ cu $xyz = 1$.

Soluție: a) $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 \leq 2(x^4 + y^4) \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 \geq 0, \forall x, y > 0$.

b) $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{2}{x^2 + y^2} \leq \frac{2}{2xy} = z$ și analoagele. Sumând cele trei relații obținem inegalitatea din enunț.

Barem

a) $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 \leq 2(x^4 + y^4)$ $\Leftrightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \leq 2x^4 + 2y^4 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 \geq 0, \forall x, y > 0$	5 p
	5 p
b) $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{2}{x^2 + y^2} \leq \frac{2}{2xy} = z$ și analoagele Sumând cele trei relații obținem inegalitatea din enunț	4 p 4 p 2 p

2. (20p) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) (10p) $\lceil x - 2026 \rceil = 1$

b) (10p) $\lceil x - 2026 \rceil = 1$.

Soluție: a) $\lceil x - 2026 \rceil = 1 \Leftrightarrow [x - 2026] \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow x - 2026 \in [-1, 0) \cup [1, 2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in [2025, 2026) \cup [2027, 2028).$

b) $\lceil x - 2026 \rceil = 1 \Leftrightarrow |x - 2026| \in [1, 2) \Leftrightarrow (x - 2026) \in (-2, -1] \cup [1, 2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in (2024, 2025] \cup [2027, 2028).$

Barem

a) $\ x - 2026\ = 1 \Leftrightarrow [x - 2026] \in \{-1, 1\}$	2 p
$\Leftrightarrow x - 2026 \in [-1, 0) \cup [1, 2) \Leftrightarrow$	4 p
$\Leftrightarrow x \in [2025, 2026) \cup [2027, 2028).$	4 p
b) $\ x - 2026\ = 1 \Leftrightarrow x - 2026 \in [1, 2) \Leftrightarrow$	2 p
$\Leftrightarrow (x - 2026) \in (-2, -1] \cup [1, 2) \Leftrightarrow$	4 p
$\Leftrightarrow x \in (2024, 2025] \cup [2027, 2028).$	4 p

3. (20p) Fie triunghiul ABC și vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. În planul triunghiului se consideră punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{AM}$, $2\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN}$ și $2\overrightarrow{PB} = 9\overrightarrow{PC}$.

a) (10p) Să se exprime \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{NA} și \overrightarrow{CP} în funcție de \vec{u} și \vec{v} .

b) (10p) Să se arate că M, N, P sunt puncte coliniare.

Soluție: a) Din $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. Deci $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}\vec{u}$.

Din $2\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN} \Rightarrow 2\overrightarrow{NA} = 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. Deci $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}(-\vec{u} + \vec{v})$ și $\overrightarrow{NC} = \frac{2}{5}(-\vec{u} + \vec{v})$.

Din $2\overrightarrow{PB} = 9\overrightarrow{PC} \Rightarrow 2(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}) = 9\overrightarrow{PC} \Rightarrow \overrightarrow{CP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$. Deci $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{7}\vec{v}$.

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{7}{20}\vec{u} + \frac{3}{5}\vec{v}$ și $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} = -\frac{2}{5}\vec{u} + \frac{24}{35}\vec{v}$

Se observă că $\overrightarrow{NP} = \frac{8}{7}\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{NP}$ și \overrightarrow{MN} sunt coliniari și cum N este comun rezultă că M, N și P sunt coliniare.

Barem

a) $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. Deci $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}\vec{u}$	3 p
$2\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN} \Rightarrow 2\overrightarrow{NA} = 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. Deci $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}(-\vec{u} + \vec{v})$ și	4 p
$\overrightarrow{NC} = \frac{2}{5}(-\vec{u} + \vec{v})$	
$2\overrightarrow{PB} = 9\overrightarrow{PC} \Rightarrow 2(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}) = 9\overrightarrow{PC} \Rightarrow \overrightarrow{CP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$. Deci $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{7}\vec{v}$	3 p
b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{7}{20}\vec{u} + \frac{3}{5}\vec{v}$ și $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} = -\frac{2}{5}\vec{u} + \frac{24}{35}\vec{v}$	4 p
$\overrightarrow{NP} = \frac{8}{7}\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{NP}$ și \overrightarrow{MN} sunt coliniari	4 p
și cum N este comun rezultă că M, N și P sunt coliniare.	2 p

4. (30p) Matei are plantați în livadă n caiși, numerotați distinct cu numerele $1, 2, 3, \dots, n$. Într-o zi, Matei a început să culeagă caise, respectând următoarea regulă: din caisul cu numărul 1 culege două caise, din caisul cu numărul 2 culege 5 caise, din caisul cu numărul 3 culege 8 caise și așa mai departe.

a) (15p) Ce număr de caise a cules din caisul cu numărul 13?

b) (15p) Câți caiși ar trebui să aibă plantați Matei pentru a fi sigur că, respectând regula indicată, la sfârșitul zilei are cules cel puțin 2026 de caise?

Soluție: a) Notăm cu x_n numărul de caise culese din caisul cu numărul n și deducem că $(x_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică, pentru care $x_1 = 2$ și rația $r = 3$. Găsim că termenul general al progresiei este $x_n = 3n - 1$ și că $x_{13} = 38$.

b) Suma caiselor culese este $S_n = \frac{(2 + 3n - 1)n}{2} = \frac{(3n + 1)n}{2}$. Din condiția $\frac{(3n + 1)n}{2} \geq 2026$ rezultă că $(3n + 1)n \geq 4052$. Încercări imediate conduc la $(3 \cdot 40 + 1) \cdot 40 = 121 \cdot 40 = 4840 < 4052$ și $(3 \cdot 41 + 1) \cdot 41 = 124 \cdot 41 = 5084 > 4052$ și astfel se deduce că $n \geq 41$.

Barem

a) Notăm cu x_n numărul de caise culese din caisul cu numărul n și deducem că $(x_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică, pentru care $x_1 = 2$ și rația $r = 3$.	5 p
Termenul general al progresiei este $x_n = 3n - 1$	5 p
Determină $x_{13} = 38$	5 p
b) Suma caiselor culese este $S_n = \frac{(3n + 1)n}{2}$.	5 p
Din condiția $\frac{(3n + 1)n}{2} \geq 2026$ rezultă că $(3n + 1)n \geq 4052$	5 p
deduce că $n \geq 41$.	5 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.