

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026
CLASA a X-a

H2

Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii

1. (20p) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) (10p) $2 \cdot 2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 2 = 0;$

b) (10p) $2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 2(x-1) = 0.$

2. (20p) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2026 - x, x \in \mathbb{Q} \\ 1 - 2026x, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Să se arate că funcția f este injectivă.

3. (20p) Pentru fiecare număr real a , definim numărul complex $z_a = \frac{1+ai}{a+i}, i^2 = -1$.

a) (10p) Demonstrați că $|z_a| = 1$ și $z_a \neq i$ pentru orice număr real a .

b) (5p) Să se arate că dacă $z_a \in \mathbb{Z}$ atunci $a \in \{-1; 1\}$.

c) (5p) Se consider numărul $n = z_2 \cdot z_{\frac{1}{2}} \cdot z_3 \cdot z_{\frac{1}{3}} \cdot \dots \cdot z_{2026} \cdot z_{\frac{1}{2026}}$. Să se arate că $n = 1$.

4. (20p) O cultură bacteriană inițial conține 500 de bacterii și crește exponențial cu o rată care dublează populația la fiecare 30 de minute în primele 2 ore, după care rata de dublare scade la fiecare 45 de minute datorită acumulării de toxine. În plus, după primele 60 de minute, 10% din bacterii mor la fiecare oră din cauza condițiilor de mediu.

Presupunând că nu există factori limitanți și folosind formula pentru creșterea exponențială

$N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$, unde $N(t)$ este numărul de bacterii după t minute, N_0 este numărul inițial de bacterii, iar T este timpul de dublare, aflați:

a) (15p) numărul de bacterii după 2 ore.

b) (15p) numărul de bacterii după 3 ore.

(Se va folosi aproximarea $\sqrt[3]{16} \approx 2,5$)

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Se acordă 10 puncte din oficiu.

3. Timp de lucru 3 ore.