

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
07 februarie 2026

CLASA a X-a

- 1. (21p)** Dacă numerele reale x, y, z au suma nulă, să se arate că pentru orice număr $a \in (0, +\infty)$ are loc inegalitatea $\log_2(a^x + a^y) + \log_2(a^y + a^z) + \log_2(a^z + a^x) \geq 3$.
- 2. a) (8p)** Demonstrați că, pentru orice numere complexe z_1, z_2 , au loc inegalitățile:
- $$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$
- b) (13p)** Determinați numerele complexe z pentru care $2|z^2 + z + 1| + |z^3| \leq 1$.
- 3. (21p)** Să se determine funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ astfel încât $(a+b)f(x) = af(f(x)) + bx$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, unde $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ și a, b sunt numere prime între ele.
- 4. (21 p)** Considerăm funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5^x + 9^{\frac{1}{x}}$.
- a) (5p)** Arătați că $5^{\log_5 9} \in \mathbb{Q}$;
- b) (6p)** Arătați că $f(\log_5 3) \in \mathbb{N}$;
- c) (10p)** Arătați că funcția este strict crescătoare pe intervalul $\left[\sqrt{\log_5 9}, +\infty \right)$.

- Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
2. Se acordă 16 puncte din oficiu
3. Timp de lucru 3 ore.