

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
7 februarie 2026
CLASA a XII-a

1. (21p) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

a) (7p) Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1$.

b) (7p) Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

c) (7p) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este crescător, cu limita $\ln 2$.

Se consideră cunoscut că $\ln(1+x) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$.

2. (21p) Pe mulțimea $M = (-1, 1)$ se dă legea de compoziție asociativă „ $*$ ” cu proprietatea că

$$x * y * z = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + yz + zx}, \forall x, y, z \in M.$$

Arătați că $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x, y \in M$.

3. (21p) Fie (G, \cdot) un grup. Demonstrați că dacă există o funcție $f: G \rightarrow G$ cu proprietatea că $xy(f(y))^2 = f(y)x^3$, pentru orice $x, y \in G$ atunci grupul G este abelian.

4. (21p) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $0 \leq a < b$ și funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă, cu proprietatea că $\int_a^b f(x) dx = bf(a) - af(b)$. Arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Se acordă 16 puncte din oficiu.

3. Timp de lucru 3 ore.