Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

PRIMO QUESITO (30 punti)

5p **1.** Calcolate il termine b_4 della progressione geometrica $(b_n)_{n\geq 1}$, noto che $b_1=\sqrt{2}$ e $b_2=4$.

5p **2.** Si considera la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+1$, dove m è numero reale diverso da zero. Determinate il numero reale m diverso da zero, per il quale l'asse Ox è tangente al grafico della funzione f.

5p **3.** Risolvete nell'insieme dei numeri reali l'equazione $3^{x+2}-3^x-6\cdot 3^{x-1}=6$.

5p **4.** Si considera l'insieme A, dei numeri naturali di due cifre. Determinate la probabilità che, scegliendo un numero n dell'insieme A, il numero $2n-60$ appartenga all'insieme A.

5p **5.** Nel riferimento cartesiano xOy si considerano i punti $A(-1,4)$, $B(5,2)$ e C, punto medio del segmento AB. Determinate l'equazione della retta d passante per il punto C e perpendicolare alla retta AB.

5p **6.** Si considera il triangolo isoscele ABC, avente la misura dell'angolo A uguale a $120°$ e $AB=6$. Dimostrate che l'area del triangolo ABC è uguale a $9\sqrt{3}$.

SECONDO QUESITO (30 punti)

1. Si considerano le matrici $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ e $B(x)=xI_2+iA$, con x numero reale ed $i^2=-1$.

5p **a)** Dimostrate che $\det A=1$.

5p **b)** Determinate il numero reale x per il quale $B(3)\cdot B(5)=8B(x)$.

5p **c)** Determinate le coppie ordinate (m,n) di numeri interi per le quali la matrice $B(m)+iB(n)$ **non** è invertibile.

2. Nell'insieme $M=[1,+\infty)$ è definita la legge di composizione $x*y=xy-\sqrt{(x-1)(y-1)}$.

5p **a)** Dimostrate che $2*5=8$.

5p **b)** Dimostrate che $e=1$ è l'elemento neutro della legge di composizione „$*$".

5p **c)** Dimostrate che $(nx)*y\geq x(n*y)$, per qualunque $x,y\in M$ e ogni numero naturale n, $n\geq 2$.

TERZO QUESITO (30 punti)

1. Si considera la funzione $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$.

5p **a)** Dimostrate che $f'(x)=\dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinate $a\in(0,+\infty)$, noto che la tangente al grafico della funzione f nel punto $A(a,f(a))$ è parallela all'asse Ox.

5p **c)** Dimostrate che $\frac{\sqrt{x}}{x^2+3} > \frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, per ogni $x \in (1,+\infty)$.

2. Si considera la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x+2x}{e^x}$.

5p **a)** Dimostrate che $\int_0^1 e^x f(x)\,dx = e$.

5p **b)** Dimostrate che $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = -1$.

5p **c)** Determinate il numero reale a per il quale $\int_0^1 F(x)f''(x)dx = \frac{a(e+1)}{e^2}$, dove $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è la primitiva della funzione f avente la proprietà $F(0)=0$.