

**Examenul de bacalaureat 2012**

**Proba E.c)**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Varianta 5**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**I. THEMA**

**(30 Puncte)**

- 5p 1. Berechne den Betrag der komplexen Zahl  $(1+i)^2$ .
- 5p 2. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte der Schaubilder der Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2x$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -x - 2$ .
- 5p 3. Löse die Ungleichung  $2^{x+1} \leq 4$  in der Menge der reellen Zahlen..
- 5p 4. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Elemente einer zufällig gewählten Teilmenge von drei Elementen von  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , aufeinander folgende Glieder einer arithmetischen Folge sind.
- 5p 5. Gegeben werden die Vektoren  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$  und  $\vec{v} = a\vec{i} - \vec{j}$ . Bestimme die reelle Zahl  $a$ , für die  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ .
- 5p 6. Berechne den Kosinus des Winkels  $A$  des Dreiecks  $ABC$ , wenn  $AB = 4$ ,  $AC = 5$  und  $BC = 7$ .

**II. THEMA**

**(30 Puncte)**

1. Gegeben wird das System 
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0, \text{ wobei } m \in \mathbb{R}. \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$
- 5p a) Berechne die Determinante der Matrix des Systems.
- 5p b) Bestimme die reellen Werte von  $m$ , für die das System eine einzige Lösung hat.
- 5p c) Bestimme, für  $m = 2$ , die Lösung  $(x_0, y_0, z_0)$  des Systems, für die  $x_0 > 0$  und  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$  gilt.
2. Es sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  und die Menge  $G = \{X(p) = I_2 + pA \mid p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$ .
- 5p a) Zeige, dass  $X(p) \cdot X(q) \in G$ , für alle  $X(p), X(q) \in G$ .
- 5p b) Wir setzen voraus, dass  $(G, \cdot)$  eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element  $X(0)$  ist. Bestimme das symmetrische (inverse) Element von  $X(p)$  in dieser Gruppe.
- 5p c) Löse die Gleichung  $(X(p))^3 = I_2 + 7A$ , wobei  $X(p) \in G$ .

**III. THEMA**

**(30 Puncte)**

1. Gegeben wird die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 12x$ .
- 5p a) Zeige, dass die Funktion auf dem Intervall  $[2, +\infty)$  steigend ist.
- 5p b) Berechne  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{f(x)}$ .
- 5p c) Bestimme die reellen Zahlen  $a$ , für die die Gleichung  $f(x) = a$  drei verschiedene reelle Lösungen hat.
2. Gegeben wird die Funktion  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ .
- 5p a) Zeige, dass jede Stammfunktion von  $f$  auf  $(-1, +\infty)$  streng steigend ist.
- 5p b) Berechne  $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx$ .
- 5p c) Berechne  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\int_0^{2x} f(t) dt}$ .