

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Variantă 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. TÊTEL

(30 pont)

- 5p** 1. Számítsd ki az $(1+i)^2$ komplex szám modulusát.
- 5p** 2. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x - 2$ függvények grafikus képeinek metszéspontját!
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $2^{x+1} \leq 4$ egyenlőtlenséget!
- 5p** 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kiválasztva az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz egy háromelemű részhalmazát, ennek elemei egy számtani haladvány egymás utáni tagjai legyenek!
- 5p** 5. Adottak az $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ és $\vec{v} = a\vec{i} - \vec{j}$ vektorok. Határozd meg az a valós értékét, amelyre $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.
- 5p** 6. Számítsd ki az ABC háromszög A szögének koszinuszát ha $AB = 4$, $AC = 5$ és $BC = 7$.

II. TÊTEL

(30 pont)

1. Adott a $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol $m \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Számítsd ki a rendszer mátrixának determinánsát!
- 5p** b) Határozd meg a m valós értékeit, amelyekre az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van!
- 5p** c) Az $m = 2$ esetben, határozd meg az egyenletrendszernek azt az (x_0, y_0, z_0) megoldását, amelyre $x_0 > 0$ és $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.
2. Adott az $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix és a $G = \{X(p) = I_2 + pA \mid p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$ halmaz.
- 5p** a) Igazold, hogy $X(p) \cdot X(q) \in G$, bármely $X(p), X(q) \in G$ esetén!
- 5p** b) Feltételezve, hogy a (G, \cdot) egy $X(0)$ semleges elemű, kommutatív csoport, határozd meg az $X(p)$ elem inverzét ebben a csoportban!
- 5p** c) Oldd meg az $(X(p))^3 = I_2 + 7A$ egyenletet, ahol $X(p) \in G$!

III. TÊTEL

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 12x$ függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy a függvény növekvő a $[2, +\infty)$ intervallumon!
- 5p** b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{f(x)}$ határértéket!
- 5p** c) Határozd meg az a valós értékeit, amelyekre az $f(x) = a$ egyenletnek három különböző valós gyöke van!
2. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy az f függvény bármely primitív függvénye szigorúan növekvő a $(-1, +\infty)$ intervallumon!
- 5p** b) Számítsd ki az $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx$ értéket!
- 5p** c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\int_0^{2x} f(t) dt}$ határértéket!