

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ÚLOHA I

(30 bodov)

- 5b 1. Vypočítajte modul komplexného čísla $(1+i)^2$.
- 5b 2. Nájdite súradnice bodov v ktorých sa pretínajú grafy funkcií $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x$ a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x - 2$.
- 5b 3. Riešte v množine reálnych čísel nerovnicu $2^{x+1} \leq 4$.
- 5b 4. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že ak náhodne vyberieme jednu z trojprvkových podmnožín množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, prvky tejto podmnožiny budú za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti.
- 5b 5. Majme vektory $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{v} = a\vec{i} - \vec{j}$. Nájdite reálne číslo a pre ktoré $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.
- 5b 6. Vypočítajte kosínus uhla A jedného trojuholníka ABC , v ktorom $AB = 4$, $AC = 5$ a $BC = 7$.

ÚLOHA II

(30 bodov)

1. Je daná sústava
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0, \text{ kde } m \in \mathbb{R}. \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$
- 5b a) Vypočítajte determinant matice danej sústavy.
- 5b b) Nájdite reálne hodnoty m , pre ktoré sústava má jediné riešenie.
- 5b c) V prípade, že $m = 2$, určte riešenie sústavy (x_0, y_0, z_0) , pre ktoré $x_0 > 0$ a $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.
2. Je daná matica $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a množina $G = \{X(p) = I_2 + pA \mid p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$.
- 5b a) Dokážte, že $X(p) \cdot X(q) \in G$, pre každé $X(p), X(q) \in G$.
- 5b b) Pripustíme, že (G, \cdot) je komutatívna grupa s neutrálnym prvkom $X(0)$. Nájdite inverzný prvok ku prvku $X(p)$ z tejto grupy.
- 5b c) Vyriešte rovnicu $(X(p))^3 = I_2 + 7A$, kde $X(p) \in G$.

ÚLOHA III

(30 bodov)

1. Je daná funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 12x$.
- 5b a) Dokážte, že funkcia je rastúca na intervale $[2, +\infty)$.
- 5b b) Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{f(x)}$.
- 5b c) Určte množinu reálnych čísel a , pre ktoré rovnica $f(x) = a$ má práve tri rôzne reálne riešenia.
2. Je daná funkcia $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$.
- 5b a) Dokážte, že každá primitíva funkcie f je rýdzo rastúca na $(-1, +\infty)$.
- 5b b) Vypočítajte $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx$.
- 5b c) Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{2x} f(t) dt}{x}$.